Chapitre 4.
Carrés, racine carrée

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2020–2021

Introduction

On l'a vu en activité lundi 11 janvier, la racine carrée est l'opération réciproque à l'opération d'élévation au carré.

Se demander "quel est le nombre, qui, au carré, donne 25 ?" c'est exactement se demander "quelle est la racine carrée de 25 ?". On peut donc écrire $5 = \sqrt{25}$ (ce nouveau symbole est la racine carrée).

On a retravaillé les carrés des entiers de 0 à 16, et on a revu quelques propriétés du carré.

Ce qu'on a vu est résumé dans la petite vidéo suivante (3 minutes 30) :

`https://www.lumni.fr/video/petits-contes-mathematiques-la-racine-carree`

On peut maintenant définir proprement ce qu'est la racine carrée d'un nombre :

La racine carrée

Le nombre positif qui, élevé au carré, donne le nombre a s'appelle la racine carrée de a. Ce nombre est noté $\sqrt{a}$.

Exemples : $5 = \sqrt{25}$ ou encore $0,7 = \sqrt{0,49}$... mais $\sqrt{2}$ n'a pas d'autre manière d'être écrit que $\sqrt{2}$. Effectivement, on pourrait approcher par ex. $\sqrt{2} \approx 1,41$, mais jamais en donner une valeur exacte en écriture décimale.

Première propriété : puisque l'élévation au carré et la racine carrée sont deux opérations réciproques (pour des nombres positifs), on a donc :

Racine carrée et carré

Si a est un nombre positif, alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Cela n'est vrai que quand a est positif ! Par exemple, le carré de -3 existe et vaut 9, mais la racine carrée de 9 est 3, pas -3.

Puisque le carré d'un nombre (réel) est toujours positif, un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée ! Par exemple, cela n'a pas de sens (à notre niveau) d'écrire $\sqrt{-1}$.

Racines carrées irrationnelles

Si a est un nombre entier qui n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{a}$ est irrationnel).

Exemple : 2 n'est pas un carré parfait donc $\sqrt{2}$ est irrationnel (ce n'est pas une fraction). Cela veut dire que son développement décimal n'est pas périodique : $\sqrt{2} \approx 1,414213562\ldots$

Il n'existe donc pas de manière exacte d'écrire le nombre $\sqrt{2}$ avec un développement décimal. Quand on demande une valeur exacte d'un calcul où il y a $\sqrt{2}$, il faut donc laisser $\sqrt{2}$, et ne pas demander à la calculatrice de donner une valeur approchée.

Démonstration :

$\sqrt{2}$ est un irrationnel (ce n'est pas une fraction)

Par l'absurde : on va supposer que c'est vrai et on va montrer que ça aboutit à une absurdité.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

m/n est irréductible, c'est-à-dire que m et n n'ont pas de facteur premier commun (ils ne sont pas divisibles tous les deux par un autre nombre que 1)

élever au carré

$2 = \frac{m^2}{n^2}$

$2 \times n^2 = m^2 \Rightarrow \boxed{m = 2k}$

$2 \times n^2 = (2k)^2$

$2n^2 = 4k^2$

$n^2 = 2k^2 \Rightarrow \boxed{n = 2\ell}$

$\Rightarrow$ contradiction $\Rightarrow \sqrt{2}$ n'est pas une fraction.

Produit de racines

Si a et b sont deux nombres positifs, alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Démonstration : on rappelle que $(xy)^2 = x^2y^2$, pour tous nombres x et y. Calculons maintenant :

- $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$ (d'après la propriété du I).
- $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$ (d'après la propriété rappelée puis la propriété du I).

On a donc deux nombres positifs dont les carrés sont égaux, c'est donc en fait le même nombre !

⚠ Pas de formule avec la racine d'une somme ! $\sqrt{a+b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. En revanche, on a aussi une formule pour le quotient :

Quotient de racines

Si a et b sont deux nombres positifs et $b \neq 0$, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration : on rappelle que $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \dfrac{x^2}{y^2}$, pour tous nombres x et $y \neq 0$. Calculons maintenant :

- $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$ (d'après la propriété du I).
- $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \dfrac{a}{b}$ (d'après le rappel et la propriété du I).

On a donc deux nombres positifs dont les carrés sont égaux, c'est donc en fait le même nombre !