Chapitre 5.
Triangles rectangles

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2020–2021

Ce chapitre est essentiellement un rappel de ce qui a été vu les années précedentes :

- le théorème de Pythagore et sa réciproque
- les rapports trigonométriques (sinus, cosinus et tangente)

Pour ce chapitre, on aura besoin de la racine carrée (pour calculer avec le théorème de Pythagore), et on aura surtout besoin de bien rédiger.

Le théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en A. On a alors l'égalité suivante :

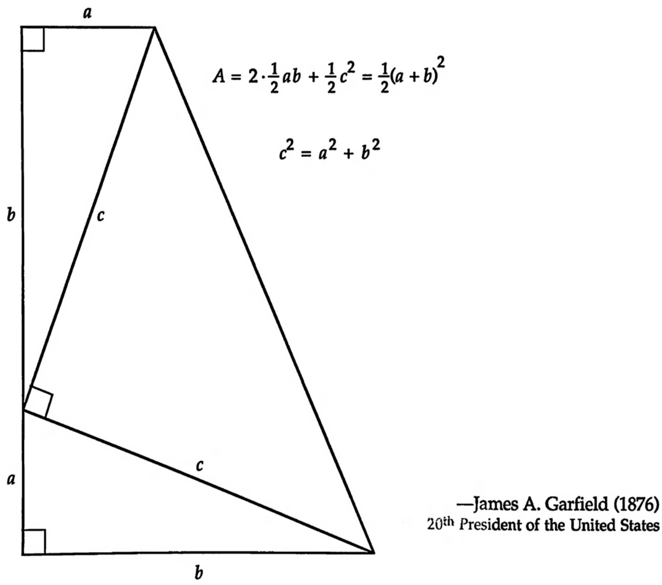
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

(le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés : si ABC est rectangle en A, l'hypoténuse est BC).

Démonstration(s) : Cf. diapositive suivante. D'autres démonstrations : `http://www.barsamian.am/S4P4/Chap5_Preuves_Pythagore.pdf` [1]

Pour trouver une longueur manquante dans un triangle rectangle, on commence par dire que le triangle est rectangle (et en quel point), puis on cite le théorème de Pythagore, et enfin on écrit l'égalité des carrés. Alors (et seulement alors) on calcule.

1. Source : R.B. Nelsen, "Proofs without words" (I, II et III).


a
b
c
c
a
b
$A = 2\cdot\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2$
$c^2 = a^2 + b^2$
—James A. Garfield (1876)
20th President of the United States

Réciproque du théorème de Pythagore

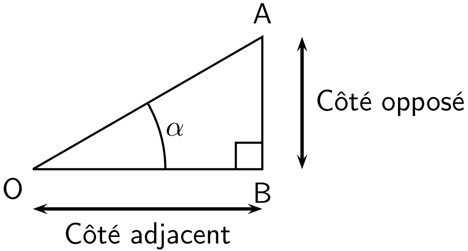
Soit ABC un triangle. Si on a l'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est rectangle en A.

On peut donc cette fois, si on connaît les trois longueurs des côtés d'un triangle, savoir si ce triangle est rectangle ou non.

On commence donc par calculer le carré du plus grand côté, puis la somme des carrés des deux autres côtés, et s'il y a égalité on peut alors citer la réciproque du théorème de Pythagore, pour conclure que le triangle est rectangle.

Cosinus, Sinus et Tangente (SOHCAHTOA)

Soit ABC un triangle rectangle, et soit α un autre angle. Alors :
$\sin(\alpha) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}, \cos(\alpha) = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \tan(\alpha) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}.$



Dans OAB rectangle en B, on a donc :

$$\sin(\alpha) = \frac{AB}{OA} ; \cos(\alpha) = \frac{OB}{OA} ; \tan(\alpha) = \frac{AB}{OB}.$$

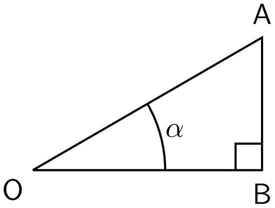
Remarques : puisque l'hypoténuse est le plus grand côté du triangle, on en déduit donc qu'on a toujours, pour α angle aigu (c'est-à-dire $0 \leq \alpha \leq 90$) :

- $0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$
- $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$

Comme on fait la division de deux longueurs pour ces trois calculs, le sinus, le cosinus et la tangente sont des nombres sans unité.

En pratique, ces égalités permettent de retrouver une longueur quand on connaît une autre longueur et un angle, et on peut également retrouver l'angle quand on connaît deux longueurs.

1) Retrouver une longueur :



Dans OAB rectangle en B, on connaît $\alpha = 30$, $AB = 3\ cm$. On peut donc retrouver les deux autres longueurs. Pour retrouver OA :

$$\sin(\alpha) = \frac{AB}{OA}$$

On remplace par les valeurs, et $\sin(30) = 0,5$

$$0,5 = \frac{3}{OA}$$

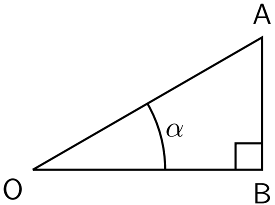
$\times OA$

$$0,5 \times OA = 3$$

$\div 0,5$

$$OA = 6$$

2) Retrouver un angle :



Dans OAB rectangle en B, on connaît $AB = 3\ cm$ et $OB = 5\ cm$.
On peut donc retrouver l'angle α :

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \frac{AB}{OB} \\
\tan(\alpha) &= \frac{3}{5} \\
\tan(\alpha) &= 0,6 \\
\alpha &\approx 31,0
\end{aligned}$$

On remplace par les valeurs

On calcule

Calculatrice : *atan* ou tan^{-1} ou *arctan*