Chapitre 8.
Système d'équations

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2020–2021

Uccle
Schola Europaea • Bruxelles I

Introduction

À tout moment dans le cours, on pourra se référer à la vidéo suivante (21 minutes) qui résume toutes les méthodes à savoir mettre en œuvre dans ce chapitre (le lien direct est disponible sur la page du cours `http://www.barsamian.am/2020-2021/S4P4/`, dans les ressources du chapitre 8) :

`https://www.youtube.com/watch?v=sWaHnxqUve0`

Thèmes abordés :

- résolution par substitution
- résolution par combinaisons linéaires
- résolution graphique

I/ Exemple de problème

À la pizzeria ce jeudi, toutes les pizzas étaient au même prix. Nous avons commandé quatre pizzas et deux cafés. Cela nous a coûté 38€. La table voisine a commandé cinq pizzas et quatre cafés. Leur addition était de 50,5€. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

I/ Exemple de problème

À la pizzeria ce jeudi, toutes les pizzas étaient au même prix. Nous avons commandé quatre pizzas et deux cafés. Cela nous a coûté 38€. La table voisine a commandé cinq pizzas et quatre cafés. Leur addition était de 50,5€. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

1. Choix des inconnues : p le prix d'une pizza, c le prix d'un café

I/ Exemple de problème

À la pizzeria ce jeudi, toutes les pizzas étaient au même prix. Nous avons commandé quatre pizzas et deux cafés. Cela nous a coûté 38€. La table voisine a commandé cinq pizzas et quatre cafés. Leur addition était de 50,5€. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

1. Choix des inconnues : p le prix d'une pizza, c le prix d'un café
2. Mise en équations :

$$\begin{cases} 4p + 2c = 38 & \text{l'addition de notre table} \\ 5p + 4c = 50,5 & \text{celle de la table voisine} \end{cases}$$

À la pizzeria ce jeudi, toutes les pizzas étaient au même prix. Nous avons commandé quatre pizzas et deux cafés. Cela nous a coûté 38€. La table voisine a commandé cinq pizzas et quatre cafés. Leur addition était de 50,5€. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

1. Choix des inconnues : p le prix d'une pizza, c le prix d'un café
2. Mise en équations :

$$\begin{cases} 4p + 2c = 38 & \text{l'addition de notre table} \\ 5p + 4c = 50,5 & \text{celle de la table voisine} \end{cases}$$

3. Résoudre le système ! Cela donne $p = 8,5$ et $c = 2$.

I/ Exemple de problème

À la pizzeria ce jeudi, toutes les pizzas étaient au même prix. Nous avons commandé quatre pizzas et deux cafés. Cela nous a coûté 38€. La table voisine a commandé cinq pizzas et quatre cafés. Leur addition était de 50,5€. Quel est le prix d'un café, et le prix d'une pizza ?

1. Choix des inconnues : p le prix d'une pizza, c le prix d'un café
2. Mise en équations :

$$\begin{cases} 4p + 2c = 38 & \text{l'addition de notre table} \\ 5p + 4c = 50,5 & \text{celle de la table voisine} \end{cases}$$

3. Résoudre le système ! Cela donne $p = 8,5$ et $c = 2$.
4. Vérification de la solution.

II/ Résolution graphique

Rappel du chapitre 3 : intersection de deux courbes de fonctions affines. Pour reprendre les notations habituelles, on va noter x le prix d'une pizza et y le prix d'un café.

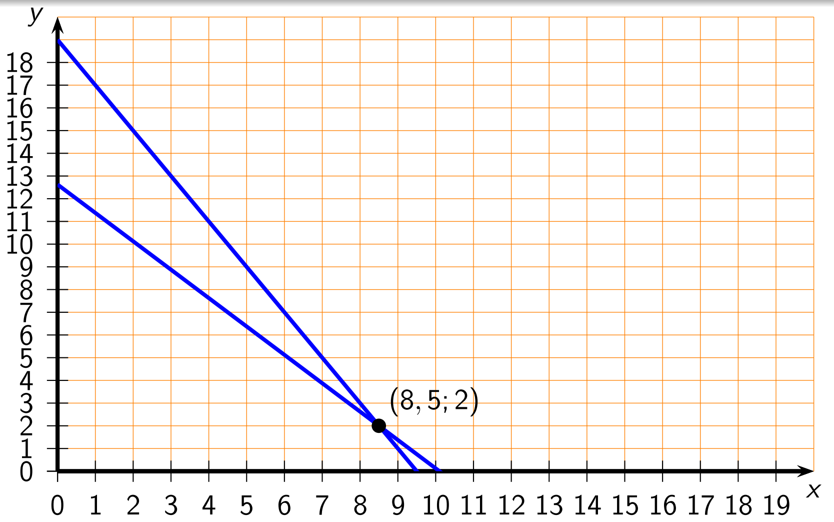
$$\begin{cases} 4x + 2y = 38 \\ 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

Une équation de droite s'écrit $y = ax + b$, on va donc mettre les deux équations sous cette forme.

$$\begin{cases} 2y = -4x + 38 \\ 4y = -5x + 50,5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x + 19 \\ y = -1,25x + 12,625 \end{cases}$$

Ensuite on trace les droites et on regarde leur intersection...

II/ Résolution graphique



Tracer les courbes prend du temps, c'est un tracé approché, et les calculs peuvent être fastidieux (pour $y = -1,25x + 12,625$ notamment !). Il y a plus simple.

Que se passe-t-il quand on souhaite résoudre les deux problèmes suivants ?

Problème 1 : cette fois-ci, notre table a une addition de 25 euros pour deux pizzas et deux cafés, et nos voisins ont une addition de 50 euros pour quatre pizzas et quatre cafés.

Problème 2 : cette fois-ci, notre table a une addition de 20 euros pour deux pizzas et un café, et nos voisins ont une addition de 44 euros pour quatre pizzas et deux cafés.

Voici la méthode par substitution :

1. On s'arrange pour isoler l'une des deux variables dans l'une des lignes (ici y) :

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+2y=38 \\ 5x+4y=50,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y=38-4x \\ 5x+4y=50,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y=19-2x} \\ 5x+4y=50,5 \end{array}\right.$$

Voici la méthode par substitution :

1. On s'arrange pour isoler l'une des deux variables dans l'une des lignes (ici y) :

$$\begin{cases} 4x+2y=38 \\ 5x+4y=50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=38-4x \\ 5x+4y=50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y=19-2x} \\ 5x+4y=50,5 \end{cases}$$

2. On remplace cette variable dans l'autre équation et on résout :

$$\begin{cases} y=19-2x \\ 5x+4\times(19-2x)=50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=19-2x \\ 5x+76-8x=50,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=19-2x \\ -3x+76=50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=19-2x \\ -3x=-25,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=19-2x \\ \boxed{x=8,5} \end{cases}$$

Voici la méthode par substitution :

1. On s'arrange pour isoler l'une des deux variables dans l'une des lignes (ici y) :

$$\begin{cases} 4x+2y=38 \\ 5x+4y=50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=38-4x \\ 5x+4y=50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y=19-2x} \\ 5x+4y=50,5 \end{cases}$$

2. On remplace cette variable dans l'autre équation et on résout :

$$\begin{cases} y=19-2x \\ 5x+4\times(19-2x)=50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=19-2x \\ 5x+76-8x=50,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=19-2x \\ -3x+76=50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=19-2x \\ -3x=-25,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=19-2x \\ \boxed{x=8,5} \end{cases}$$

3. On remplace cette valeur dans la première équation :

$$\begin{cases} y=19-2x \\ x=8,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=19-2\times 8,5 \\ x=8,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y=2} \\ x=8,5 \end{cases}$$

IV/ Méthode par combinaison linéaire

Ici on numérote les lignes ($L1$ et $L2$) pour détailler les opérations.
Voici la méthode par combinaison :

IV/ Méthode par combinaison linéaire

Ici on numérote les lignes ($L1$ et $L2$) pour détailler les opérations. Voici la méthode par combinaison :

1. On s'arrange pour mettre dans chaque ligne autant de fois l'une des deux variables (ici y) :

$$\left\{\begin{array}{ll}(L1) & 4x+2y=38\\(L2) & 5x+4y=50,5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}(2\times L1) & 8x+4y=76\\(L2) & 5x+4y=50,5\end{array}\right.$$

IV/ Méthode par combinaison linéaire

Ici on numérote les lignes ($L1$ et $L2$) pour détailler les opérations. Voici la méthode par combinaison :

1. On s'arrange pour mettre dans chaque ligne autant de fois l'une des deux variables (ici y) :

$$\left\{\begin{array}{ll} (L1) & 4x+2y=38 \\ (L2) & 5x+4y=50,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (2\times L1) & 8x+4y=76 \\ (L2) & 5x+4y=50,5 \end{array}\right.$$

2. On soustrait une ligne à l'autre pour faire disparaître cette variable, puis on résout :

$$\left\{\begin{array}{ll} (L1-L2) & 3x=25,5 \\ (L2) & 5x+4y=50,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} (L1) & x=8,5 \\ (L2) & 5x+4y=50,5 \end{array}\right.$$

IV/ Méthode par combinaison linéaire

Ici on numérote les lignes ($L1$ et $L2$) pour détailler les opérations. Voici la méthode par combinaison :

1. On s'arrange pour mettre dans chaque ligne autant de fois l'une des deux variables (ici y) :

$$\begin{cases} (L1) & 4x + 2y = 38 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 \times L1) & 8x + 4y = 76 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

2. On soustrait une ligne à l'autre pour faire disparaître cette variable, puis on résout :

$$\begin{cases} (L1 - L2) & 3x = 25,5 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L1) & x = 8,5 \\ (L2) & 5x + 4y = 50,5 \end{cases}$$

3. Enfin on remplace dans l'autre équation :

$$\begin{cases} (L1) & x = 8,5 \\ (L2) & 5 \times 8,5 + 4y = 50,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8,5 \\ 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8,5 \\ y = 2 \end{cases}$$