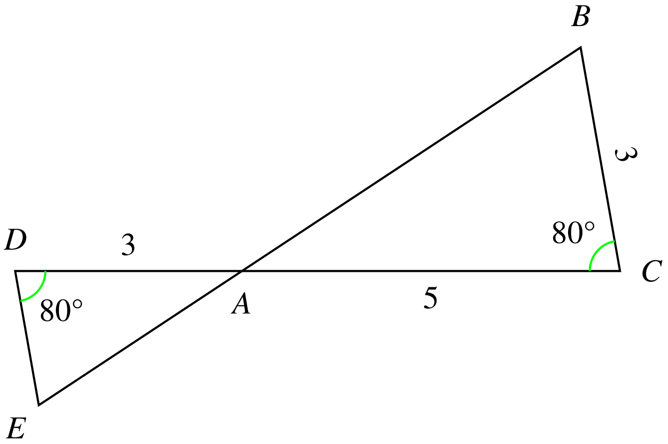
Exercice 1 — La configuration du papillon 3 points

On donne la figure suivante (D, A, C sont alignés ainsi que E, A, B) :



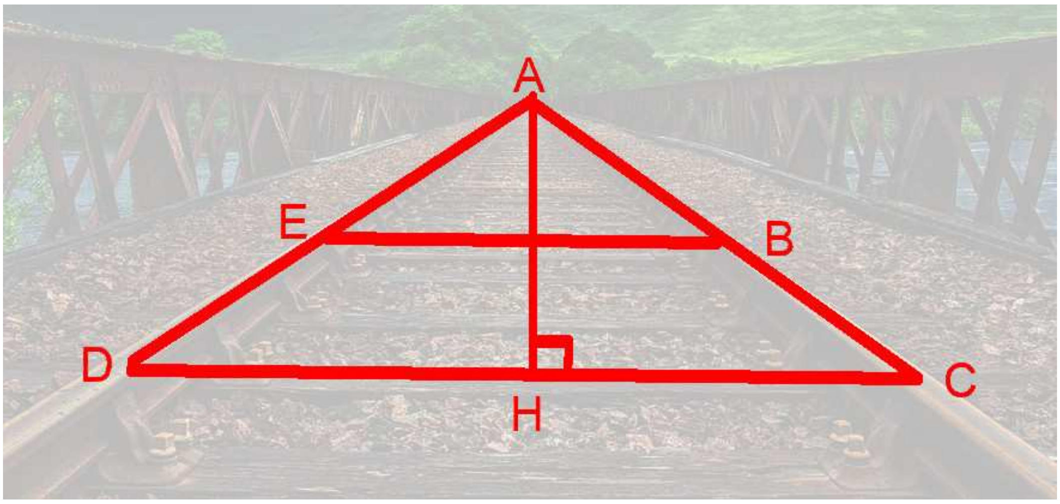
1. Démontrer que $(BC) \mathbin{/\!/} (DE)$.
2. Calculer la longueur DE.

1. Les droites (BC) et (DE) forment toutes les deux un angle de 80° avec la droite (DC), donc elles sont parallèles entre elles.
2. Sur la figure, on sait que $\begin{cases} D, A, C \text{ sont alignés} \\ E, A, B \text{ sont alignés} \\ (BC) \mathbin{/\!/} (DE) \end{cases}$ On peut donc appliquer le théorème de Thalès (le triangle ADE est une réduction du triangle ABC), et on a donc l'égalité des rapports :

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$$
On remplace par ce qu'on connaît
$$\frac{3}{5} = \frac{DE}{3}$$
$\times 3$
$$3 \times \frac{3}{5} = DE$$
On calcule
$$\boxed{1,8 = DE}$$

Exercice 2 — Les rails 2 points + 0,5 point

L'image suivante est la modification d'une photo.



Source : `https://www.pikist.com/free-photo-xrxgg`

Sur la photo, les morceaux de bois qui tiennent les rails sont parallèles. $[EB]$ et $[CD]$ sont deux de ces morceaux. On a mesuré que $DC = 20$ cm, $AC = 15$ cm, et $AB = 9$ cm. Calculer EB.

BONUS : On sait de plus que le triangle ACD est isocèle en A. En déduire la hauteur du triangle ADC, si on choisit le segment $[CD]$ comme base.

Sur la figure, A est le point de fuite (là où se rejoignent les rails "à l'infini"), et les morceaux de bois $[EB]$ et $[DC]$ rejoignent les rails :

$$\begin{cases} A, E, D \text{ sont alignés} \\ A, B, C \text{ sont alignés} \\ (EB) \parallel (DC) \end{cases}$$

On peut donc appliquer le théorème de Thalès, car le triangle ADC est un agrandissement du triangle ABE. On en déduit donc l'égalité des rapports :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{9}{15} = \frac{BE}{20}$$

$\times 20$

$$20 \times \frac{9}{15} = DE$$

On calcule

$$\boxed{12 = DE}$$

BONUS : On a rajouté sur la figure le point H, pied de la hauteur de ADC issue de A. Comme ACD est isocèle en A, la hauteur est la médiane, donc H est le milieu de $[DC]$. Dans le triangle AHC rectangle en H, on a donc suffisamment d'informations pour appliquer le théorème de Pythagore pour trouver AH, en cm :

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$15^2 = AH^2 + 10^2$$

On calcule

$$225 = AH^2 + 100$$

-100

$$125 = AH^2$$

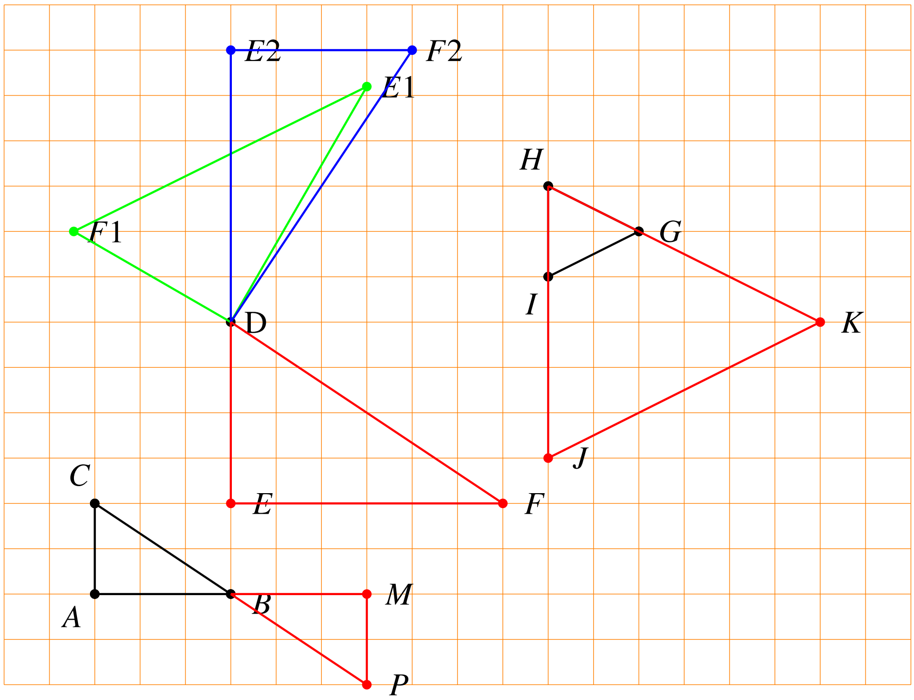
Racine carrée

$$\boxed{\sqrt{125} = AH}$$

(ce qui donne $AH = \sqrt{125} \approx \boxed{11,2}$ si on veut une valeur approchée)

Exercice 3 — Construction graphique 2 points + 0,25 point

Sur le dessin suivant, on a représenté différents points.



1. Dessiner un triangle possible DEF qui est un agrandissement du triangle ABC avec pour coefficient 2.

   Remarque : le point D est déjà donné sur la figure. Il y a plusieurs réponses possibles, on ne demande qu'une seule figure.

2. Dessiner le triangle HJK qui est l'agrandissement du triangle HIG d'un coefficient 3 tel que HIG soit emboîté dans HJK.

   Remarque : il n'y a qu'une seule réponse posible.

BONUS Dessiner BMP, l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre B et de rapport -1.

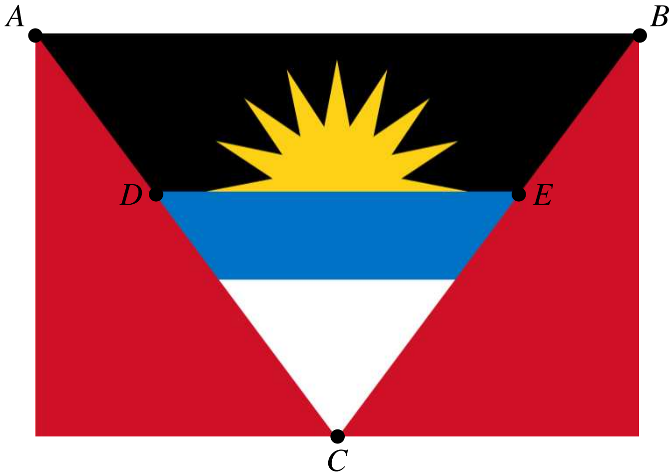
   Remarque : il n'y a qu'une seule réponse posible.

1. Il y a plusieurs possibilités (il y en a même une infinité), j'ai dessiné plusieurs des possibilités sur le dessin.
2. Puisque le triangle HIG doit être emboîté dans HJK, il n'y a qu'une manière possible de dessiner le triangle (mais avec un choix pour la position des points J et K qui peuvent être échangés). Cf. la figure.

BONUS Une homothétie, c'est un agrandissement ou une réduction qui laisse un point stable (ici, le point B) et qui crée la nouvelle figure du même côté de B si le rapport est positif, ou de l'autre côté (avec une symétrie centrale) si le rapport est négatif (comme ici). Un rapport de -1 veut donc simplement dire qu'on a un triangle de mêmes dimensions, mais avec une symétrie centrale.

Exercice 4 — Le drapeau 3 points + 0,25 point

L'image suivante représente le drapeau d'Antigua-et-Barbuda. On sait que le triangle blanc est une réduction du triangle ABC, avec coefficient $0,4$, et que sur le drapeau en vraie grandeur, l'aire de ABC est de 1 200 cm^2.



1. Quelle est l'aire du triangle blanc en vraie grandeur ?
2. Le triangle CDE est une réduction de ABC. En vraie grandeur, CDE a une aire de 500 cm^2. Quel est le coefficient de cette réduction ? On arrondia à $0,1$ près.

BONUS Quelle est l'aire rouge en vraie grandeur ?

1. Le triangle blanc est une réduction du triangle ABC avec coefficient $0,4$, donc l'aire du triangle blanc vaut $0,4^2 \times \mathcal{A}(ABC) = \boxed{192 \text{ cm}^2}$.
2. Si on note c le coefficient de réduction, on sait que $c^2 \times \mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(CDE)$. Ce qui donne donc $c^2 \times 1200 = 500$ soit $c^2 = \dfrac{5}{12}$ et donc $c = \sqrt{\dfrac{5}{12}} \approx \boxed{0,6}$.

BONUS L'aire de ABC est la moitié de l'aire totale. Effectivement, si on choisit [AB] comme base (qui mesure la longueur du drapeau), alors la hauteur du triangle mesure la largeur du drapeau, donc l'aire de ABC vaut $\dfrac{\text{largeur} \times \text{longueur}}{2}$ ce qui fait la moitié de l'aire totale du drapeau. Donc l'aire rouge vaut autant que l'aire de ABC, soit $\boxed{1\,200 \text{ cm}^2}$.