**Exercice 1 — Modèles et formules quadratiques** **12 points**

5 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   (a) $6x^2 + x - 1 = 0$ (b) $-2x^2 + 4x - 5 = 0$ (c) $(x-1)^2 - 1 = 0$

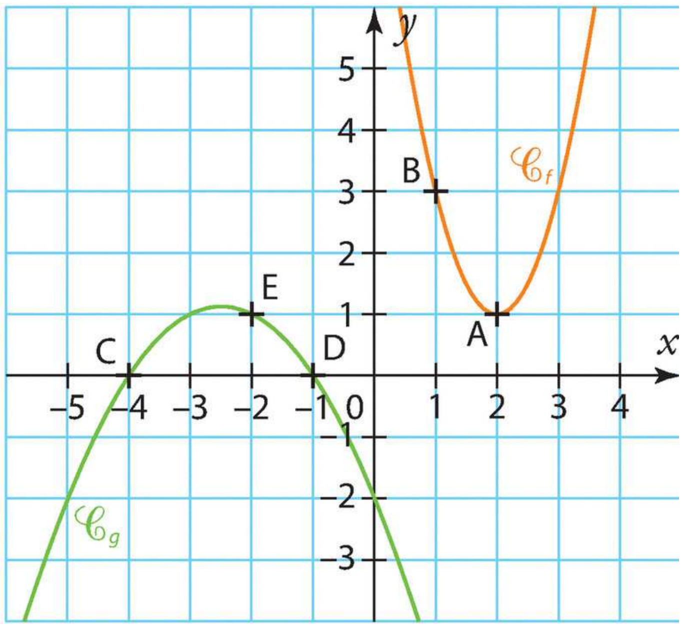
7 points

2. Soient $f$ et $g$ deux fonctions polynomiales de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$ dont les courbes sont données ci-contre ($\mathcal{C}_f$ pour $f$ et $\mathcal{C}_g$ pour $g$).

   (a) Déterminer, pour chaque courbe, le signe de « $a$ » et le signe du discriminant « $\Delta$ ».

   (b) Déterminer une expression de $f(x)$ et une expression de $g(x)$ en justifiant vos raisonnements. (On donnera, au choix, l'une des trois formes suivantes : la forme canonique, factorisée ou développée.)

   Remarque : les points A, B, C, D et E sont tous sur le quadrillage, les points A et B sont sur $\mathcal{C}_f$, et les points C, D et E sont sur $\mathcal{C}_g$.




1. (a) Dans l'équation $6x^2 + x - 1 = 0$, les coefficients sont $a = 6$, $b = 1$ et $c = -1$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 6} = \dfrac{-1 \pm 5}{12}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-6}{12}; \dfrac{4}{12}\right\}}$ (on pouvait simplifier en $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-1}{2}; \dfrac{1}{3}\right\}}$).

   (b) Dans l'équation $-2x^2 + 4x - 5 = 0$, les coefficients sont $a = -2$, $b = 4$ et $c = -5$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = 16 - 40 = -24$. Donc on n'a aucune solution réelle, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

   (c) Dans l'équation $(x-1)^2 - 1 = 0$, on peut soit développer pour faire apparaître les coefficients et résoudre comme au-dessus, soit reconnaître l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, soit encore laisser le carré avec le $x$ d'un côté.

   - On développe : $(x-1)^2 - 1 = x^2 + 1^2 - 2 \times x \times 1 - 1 = x^2 + 1 - 2x - 1 = x^2 - 2x$. Du coup les coefficients sont $a = 1$, $b = -2$ et $c = 0$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4 + 0 = 4$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2 \times 1} = \dfrac{2 \pm 2}{2}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \{0; 2\}}$.
   - Avec l'identité remarquable : $(x-1)^2 - 1 = (x-1)^2 - 1^2 = (x-1+1)(x-1-1) = x(x-2)$. Du coup, $x(x-2) = 0$, c'est un produit de facteurs nul, qui est nul si et seulement l'un des facteurs est nul. On a soit $x = 0$, soit $x - 2 = 0$, d'où également $\boxed{\mathcal{S} = \{0; 2\}}$.
   - Enfin on pouvait aussi résoudre à la main :

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 1 &= 0 && \\ (x-1)^2 &= 1 && +1 \\ x - 1 &= \pm\sqrt{1} && a^2 = b \text{ avec } b > 0 \text{ équivaut à } a = \pm\sqrt{b} \\ x &= \pm 1 + 1 && +1 \end{aligned}$$

     On retrouve également $\boxed{\mathcal{S} = \{0; 2\}}$.

2. (a) La parabole $\mathcal{C}_f$ est tournée vers le haut, donc $\boxed{\text{pour } f,\ a > 0}$. La parabole $\mathcal{C}_g$ est tournée vers le bas, donc $\boxed{\text{pour } g,\ a < 0}$.

   La parabole $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses, donc $f(x) = 0$ n'a aucune solution réelle, ainsi $\boxed{\text{pour } f,\ \Delta < 0}$. La parabole $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en deux points, donc $g(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes, ainsi $\boxed{\text{pour } g,\ \Delta > 0}$.

(b) On lit sur le graphique que A$(2;1)$ est le sommet de $\mathcal{C}_f$. Cela nous enjoint à utiliser la forme canonique :

$$f(x) = a(x-2)^2 + 1$$

Pour trouver la valeur de $a$, on utilise le point B$(1;3)$. Effectivement on sait alors que :

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 && \text{On remplace } x \text{ par } 1 \text{ dans l'expression de } f(x) \\ a(1-2)^2+1 &= 3 && \text{On simplifie} \\ a(-1)^2+1 &= 3 && \text{On calcule} \\ a+1 &= 3 && -1 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi on trouve $\boxed{f(x) = 2(x-2)^2+1}$.

On lit sur le graphique que C$(-4;0)$ et D$(-1;0)$ sont les points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses, donc cela nous enjoint à utiliser la forme factorisée :

$$g(x) = a(x-(-4))(x-(-1)) = a(x+4)(x+1)$$

Pour trouver la valeur de $a$, on utilise le point E$(-2;1)$. Effectivement on sait alors que :

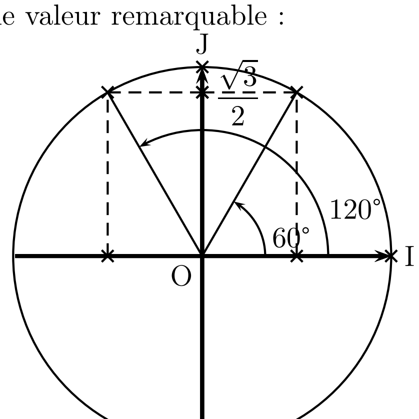
$$\begin{aligned} g(-2) &= 1 && \text{On remplace } x \text{ par } -2 \text{ dans l'expression de } g(x) \\ a(-2+4)(-2+1) &= 1 && \text{On simplifie} \\ a(2)(-1) &= 1 && \text{On calcule} \\ -2a &= 1 && \div(-2) \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi on trouve $\boxed{g(x) = -\frac{1}{2}(x+4)(x+1)}$.

**Exercice 2 — Équations trigonométriques** **9 points**

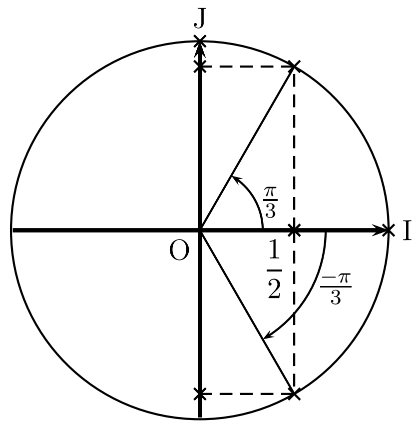
| | |
|---|---|
| | Résoudre les équations suivantes : |
| 3 points | 1. $2\sin(x) = \sqrt{3}$, pour $x \in [0;360°]$ |
| 3 points | 2. $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, pour $x \in [0;2\pi]$ |
| 3 points | 3. $\cos^2(x) + \cos(x) = 0$, pour $x \in [0;2\pi]$ |

1. Résoudre $2\sin(x) = \sqrt{3}$, c'est résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, qui est une valeur remarquable :




Ici, il y a deux solutions dans $[0;360°]$ : $\boxed{\mathcal{S} = \{60°;120°\}}$.

2. $\frac{1}{2}$ est aussi une valeur remarquable :




Ici, l'angle $x+\frac{\pi}{3}$ vaut donc, à $2\pi$ près, $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$. Du coup, on a soit $x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ ce qui donne $x = 0$ ou $2\pi$, soit $x+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ ce qui donne $x = \frac{4\pi}{3}$.

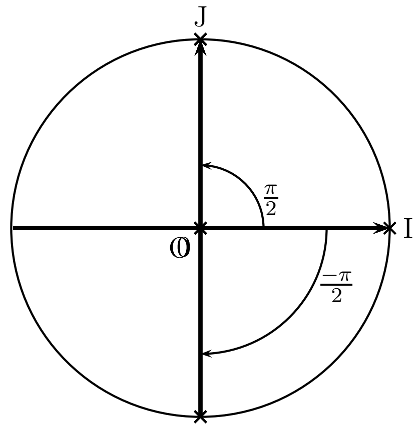
Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{0;\frac{4\pi}{3};2\pi\right\}}$.

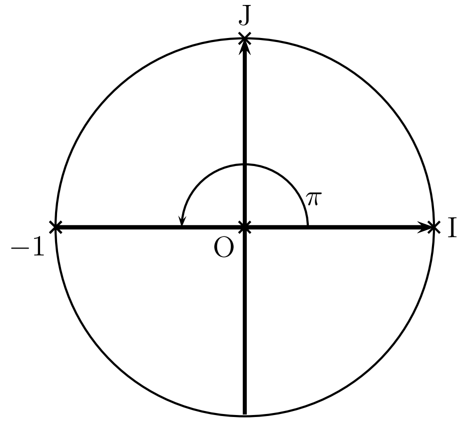
3. Pour résoudre une équation de ce type, la méthode à connaître est de faire le changement de variable $X = \cos(x)$ pour aboutir à une équation du 2nd degré.

$$\begin{aligned} \cos^2(x) + \cos(x) &= 0 \\ X^2 + X &= 0 \end{aligned} \quad \text{On pose } X = \cos(x)$$

Ici on peut factoriser par $X$ ce qui donne $X(X+1) = 0$ ou bien sinon calculer le discriminant : les coefficients sont $a = 1$, $b = 1$ et $c = 0$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 0 = 1 + 0 = 1$. Donc on a deux solutions $X_\pm = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm 1}{2}$ c'est-à-dire 0 et $-1$.

Maintenant qu'on a trouvé les solutions avec la variable $X = \cos(x)$, il faut trouver les solutions avec la variable $x$. On est donc ramenés à deux équations : $X = 0$ demande de résoudre $\cos(x) = 0$ (à gauche) et $X = -1$ demande de résoudre $\cos(x) = -1$ (à droite).




Ici, il y a deux solutions dans $[0; 2\pi]$ : $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$. Ici, il y a une solution dans $[0; 2\pi]$ : $\pi$.

Au final, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{2}; \pi; \dfrac{3\pi}{2}\right\}}$.

**Exercice 3 — Probabilités** **6 points**

| | |
|---|---|
| | Une expérience aléatoire consiste à jeter en même temps deux dés bien équilibrés. Chacun de ces dés a 6 faces numérotées de 1 à 6. |
| 1 point | 1. Donner le nombre d'issues possibles de cette expérience. |
| | 2. Calculer les probabilités des événements suivants, en exprimant les résultats sous forme de fraction : |
| 2 points | G = « Aucun 3 n'a été obtenu » ; |
| 2 points | I = « La somme des résultats est divisible par 4 ou strictement plus grande que 10 ». |
| 1 point | 3. Décrivez un événement impossible pour cette expérience aléatoire. |

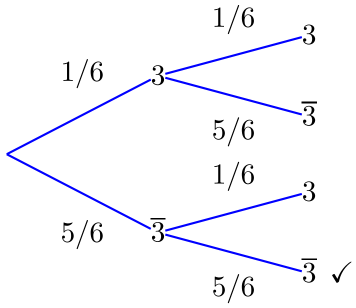
1. Chaque dé a 6 faces. Si on a un moyen de distinguer les 2 dés (par exemple, s'ils ont chacun un trait distinctif comme la couleur, la taille...) alors on a $\boxed{\text{36 issues}}$ différentes : le premier dé donne "1" et le second donne "2" sera noté $(1; 2)$, les 36 issues sont les couples d'entiers entre 1 et 6

$$(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), \ldots$$

Ces 36 issues sont équiprobables.

Remarque : Si on n'a aucun moyen de distinguer les deux dés, alors ce qu'on voit c'est simplement un multi-ensemble de deux nombres entre 1 et 6. On n'a aucun moyen de distinguer $\{1; 2\}$ de $\{2; 1\}$ qui est du coup traité comme une seule issue, ainsi on n'a plus que 21 issues différentes (mais cette fois, les 21 issues ne sont pas équiprobables donc plus moyen de faire de calcul comme nombre d'issues favorables sur nombre d'issues au total...)

2. Pour l'événement G, on peut faire un arbre à deux étages (un étage par dé), en séparant le fait d'obtenir un 3 ou pas :




La seule branche qui correspond à l'événement G est celle du bas, sa probabilité est de $P(G) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{25}{36}}$.

Remarque : on pouvait aussi dire, sans faire d'arbre, que les événements « ne pas obtenir un 3 sur le premier dé » et « ne pas obtenir un 3 sur le second dé » sont indépendants, et calculer directement la probabilité de G comme le produit des deux probabilités.

Pour l'événement I, on peut écrire un tableau à double entrée répertoriant toutes les sommes différentes. Ensuite, on a mis en rouge les issues qui correspondent à I :

| Dé 1 \ Dé 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

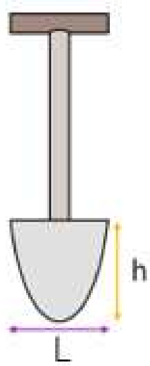
On voit dans le tableau qu'on a 11 issues favorables sur 36 issues en tout, d'où $\boxed{P(I) = \frac{11}{36}}$.

3. Pour cette expérience aléatoire, il est impossible d'obtenir une somme égale à 13, il est impossible d'obtenir un 7 sur l'un des dés, il est impossible de faire exploser la planète, il est impossible de se transformer en grenouille. . .

## Exercice 4 — Modèles et formules quadratiques — 16 points

Nous souhaitons modéliser le contour arrondi de la partie plate de la pelle ci-contre par une fonction $f$ du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$




On sait que la largeur $L$ de cette partie plate est 20 cm plus petite que sa hauteur $h$ et que le carré de la largeur fait 18 fois la hauteur.

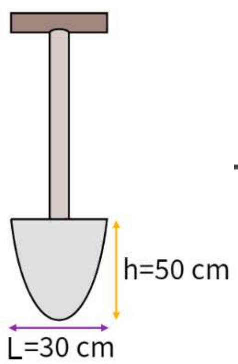
1. On admet que l'énoncé peut être traduit en l'équation suivante :

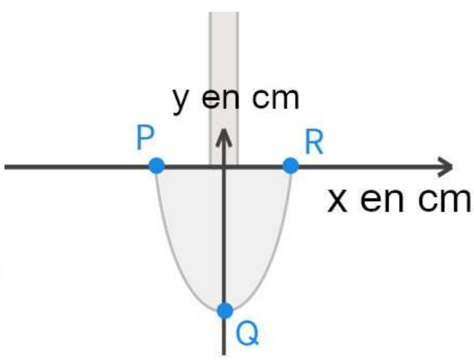
$$h^2 - 40h + 400 = 18h$$

4 points — (a) Résoudre cette équation.

2 points — (b) Parmi les deux solutions trouvées à la question précédente, une seule peut correspondre à la hauteur $h$ cherchée. Laquelle et pourquoi ?

2 points — 2. En utilisant les informations des figures suivantes, donner les coordonnées des points P et Q :



| | |
|---|---|
| 2 points | 3. À l'aide des coordonnées du sommet de la parabole, déterminer une expression de la forme canonique de $f$ (cette expression fera encore apparaître $a$). |
| 4 points | 4. En utilisant le fait que R est sur la courbe de $f$, calculer $a$ et exprimer le résultat sous forme fractionnaire. |
| 2 points | 5. Déduire des questions précédentes une expression de $f(x)$. |

1. (a) Afin de résoudre l'équation $h^2 - 40h + 400 = 18h$, on va faire apparaître la forme que l'on connaît bien $ah^2 + bh + c = 0$.

$$h^2 - 40h + 400 = 18h$$

$-18h$

$$h^2 - 58h + 400 = 0$$

Dans cette équation, $a = 1$, $b = -58$ et $c = 400$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-58)^2 - 4 \times 1 \times 400 = 1\ 764$. Donc on a deux solutions $x_{\pm} = \dfrac{-(-58) \pm \sqrt{1\ 764}}{2 \times 1} = \dfrac{58 \pm 42}{2} = 29 \pm 21$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \{8; 50\}}$.

(b) L'énoncé nous indique que $L = h - 20$, du coup ce n'est pas possible que $h$ vaille 8 (cela donnerait $L = -12$). Du coup, $\boxed{\text{c'est forcément } h = 50}$.

2. Sur la figure de droite, on voit que P et R sont sur l'axe des abscisses, et que l'origine est le milieu de [PR]. Sur la figure de gauche, on voit que $L = 30$ donc PR $= 30$, ainsi $\boxed{\mathrm{P}(-15; 0) \text{ et } \mathrm{R}(15; 0)}$. Enfin, la figure de gauche indique que $h = 50$, donc le point Q, sur l'axe des ordonnées, a pour coordonnées $\boxed{\mathrm{Q}(0; -50)}$.

3. La parabole a pour sommet Q, donc la forme canonique de $f$ s'écrit :

$$f(x) = a(x - 0)^2 - 50 = \boxed{ax^2 - 50}$$

4. Pour trouver la valeur de $a$, on utilise le point R(15; 0). Effectivement on sait alors que :

$$f(15) = 0$$

On remplace $x$ par 15 dans l'expression de $f(x)$

$$a(15)^2 - 50 = 0$$

On simplifie

$$225a - 50 = 0$$

$+50$

$$225a = 50$$

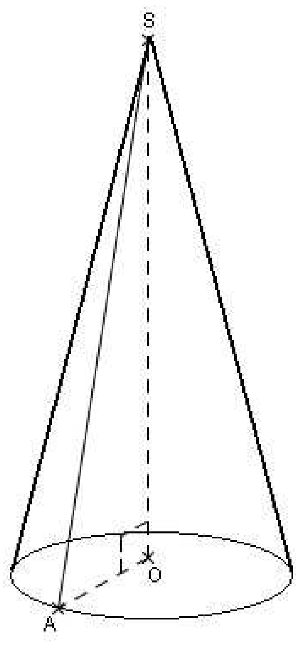
$\div 225$

$$a = \frac{50}{225}$$

Ainsi on trouve $\boxed{a = \dfrac{50}{225} = \dfrac{2}{9}}$.

5. En remplaçant $a$ par sa valeur, on trouve donc $\boxed{f(x) = \dfrac{2}{9}x^2 - 50}$.

**Exercice 5 — Longueurs et distances dans les objets 3D** **12 points**

| | |
|---|---|
| | On considère une bougie dont la forme est un cône de révolution, représentée ci-contre (la figure n'est pas aux dimensions réelles.). Le rayon OA de sa base est 2,5 cm. La longueur du segment [SA] est 6,5 cm.   |
| 1 point | 1. Sans justifier, donner la nature du triangle SAO. |
| 3 points | 2. Montrer que la hauteur SO de la bougie est 6 cm. |
| 3 points | 3. Calculer le volume de cire nécessaire à la fabrication de cette bougie. On donnera la valeur arrondie au dixième de cm$^3$. <br> <u>N.B. :</u> la formule du volume d'un cône de révolution est $\mathcal{V} = \dfrac{\pi r^2 \times h}{3}$ |
| 5 points | 4. Déterminer l'angle $\widehat{\text{ASO}}$. On donnera la valeur arrondie au degré. |

1. D'après le codage de la figure, $\boxed{\text{SAO est rectangle en O}}$.
2. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle, ce qui donne, en centimètres :

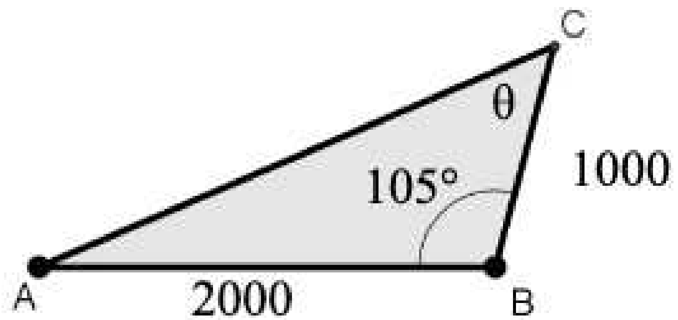
$$\begin{aligned} \mathrm{SA}^2 &= \mathrm{SO}^2 + \mathrm{AO}^2 && \\ 6,5^2 &= \mathrm{SO}^2 + 2,5^2 && \text{On remplace par les valeurs} \\ 6,5^2 - 2,5^2 &= \mathrm{SO}^2 && -2,5^2 \\ 36 &= \mathrm{SO}^2 && \text{On calcule} \\ \pm 6 &= \mathrm{SO} && \text{On résout} \end{aligned}$$

   Du coup, puisque SO est une longueur, on déduit que c'est la solution positive : $\boxed{\mathrm{SO} = 6 \text{ cm}}$.
3. Pour appliquer la formule, on remarque qu'ici, en centimètres, $r = \mathrm{OA} = 2,5$ et $h = \mathrm{SO} = 6$. Donc $\mathcal{V} = \dfrac{\pi 2,5^2 \times 6}{3} \approx 39,3$. Donc il faut environ $\boxed{39,3 \text{ cm}^3 \text{ de cire}}$.
4. Dans le triangle SAO rectangle en O, pour l'angle $\widehat{\mathrm{ASO}}$, AO correspond à la longueur du côté opposé, SO à celle du côté adjacent, SA à l'hypoténuse. On peut utiliser la relation trigonométrique de notre choix. Par exemple $\sin(\widehat{\mathrm{ASO}}) = \dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{SA}} = \dfrac{2,5}{6,5}$ d'où $\widehat{\mathrm{ASO}} = \arcsin\left(\dfrac{2,5}{6,5}\right) \approx \boxed{23°}$ (on peut prendre l'arcsinus car dans un triangle rectangle les autres angles sont $< 90°$).

**Exercice 6 — Formules dans un triangle quelconque** **16 points**

Le parcours d'une régate est formé d'un triangle ABC matérialisé par trois bouées.

Les longueurs sont exprimées en mètres.




| | |
|---|---|
| 4 points | 1. Montrer que l'aire du triangle est de 965 926 m$^2$ arrondi à 1 m$^2$ près. |
| 5 points | 2. Montrer que la longueur AC est de 2 457 m arrondi à 1 m près. |
| 5 points | 3. Déterminer $\sin(\theta)$ puis donner la valeur de de l'angle $\theta$ (arrondir à 1° près). |
| 2 points | 4. Donner le périmètre du triangle ABC et interpréter cette distance. |

1. On peut appliquer la formule de l'aire d'un triangle :

$$\mathcal{A}(\mathrm{ABC}) = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BC} \times \sin(\widehat{\mathrm{ABC}}) \approx 965\ 926$$

2. On ne connaît qu'un seul angle dans le triangle, donc la formule d'al-Kashi va nous donner la réponse :
   $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BC} \times \cos(\widehat{\mathrm{ABC}}) \approx 6\ 035\ 276,180410083$
   Du coup $\mathrm{AC} \approx \sqrt{6\ 035\ 276,180410083} \approx 2\ 457$.
3. Pour trouver $\sin(\theta)$ puis $\theta$, on va appliquer la loi des sinus :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\widehat{\mathrm{ABC}})}{\mathrm{AC}} &= \frac{\sin(\theta)}{\mathrm{AB}} && \\ \frac{\sin(105°)}{2\ 457} &\approx \frac{\sin(\theta)}{2000} && \text{On remplace par ce qu'on connaît} \\ \frac{2000 \sin(105°)}{2\ 457} &\approx \sin(\theta) && \times 2000 \\ \boxed{0,786264409 \approx \sin(\theta)} & && \text{Valeur approchée} \\ 51,837772313° \text{ ou } 128,162227687° &\approx \theta && \text{arcsin} \end{aligned}$$

Comme $\widehat{\text{ABC}} = 105°$, et que la somme des angles fait 180°, la seule valeur possible est donc $\boxed{\theta \approx 52°}$.

Remarque : On aurait dû utiliser la valeur exacte de AC, soit $\sqrt{5000000 - 4000000\cos(105°)}$ (au lieu d'utiliser la valeur approchée 2 457), mais à un degré près, ça ne changeait pas le résultat.

4. Le périmètre vaut AB + BC + CA $\approx$ 2000 + 1000 + 2 457 $\approx$ 5 457. Ainsi, le parcours de la régate mesure $\boxed{5\ 457 \text{ m}}$.

**Exercice 7 — Modèles périodiques** **6 points**

| | |
|---|---|
| | La température mensuelle d'une région est modélisée par la fonction : $$T(x) = 19,5\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-7)\right) + 0,5$$ où $x$ est le rang du mois dans l'année (en janvier, $x = 1$). |
| 2 points | 1. Montrer que la période de cette fonction est 12. |
| 1 point | 2. Déterminer la température mensuelle minimale. |
| 3 points | 3. Déterminer la température mensuelle en décembre. |

La fonction $T(x) = 19,5\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-7)\right) + 0,5$ est une fonction sinusoïdale.

Attention, pour les fonctions cosinus / sinus / tangente, c'est toujours en radians !

1. On peut retenir que pour une fonction de la forme $f(x) = a\sin(b(x+c)) + d$, la période est $\dfrac{2\pi}{a}$, donc ici ça donne $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 2\pi \times \dfrac{6}{\pi} = \boxed{12}$.

   Sinon, on pouvait aussi vérifier que $T(x+12) = T(x)$, ce qui implique que, puisque $T$ n'est pas une fonction constante, c'est une fonction périodique dont 12 est un multiple de la période (et on n'aurait pas demandé davantage... démontrer que 12 est la plus petite valeur $> 0$ vérifiant cette propriété est difficile).

2. L'énoncé nous invite à penser que la fonction n'est utile que pour des valeurs de $x$ entières. Ainsi, on peut faire un tableau des 12 valeurs utiles de $T$, et regarder la plus petite :

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T(x)$ | -19 | -16,4 | -9,25 | 0,5 | 10,25 | 17,4 | 20 | 17,4 | 10,25 | 0,5 | -9,25 | -16,4 |

   Du coup la température mensuelle minimale est de $\boxed{-19\ °\text{C}}$ (atteinte en janvier).

   Sinon on peut par exemple encadrer les valeurs en démarrant par le fait que les valeurs de cosinus sont toujours entre $-1$ et 1 :

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}(x-7)\right) &\leq 1 \\ & \quad \times 19,5 \\ -19,5 \leq 19,5\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-7)\right) &\leq 19,5 \\ & \quad +0,5 \\ -19 \leq 19,5\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-7)\right) + 0,5 &\leq 20 \end{aligned}$$

   Donc la valeur minimale de $T$ est de $\boxed{-19}$ (les valeurs de l'encadrement sont atteintes à chaque fois).

3. Ici, on demande de calculer $T(12)$. Voici le détail du calcul :

   $19,5\cos\left(\frac{\pi}{6}(12-7)\right) + 0,5 = 19,5\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 0,5 = 19,5 \times \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + 0,5 \approx -16,4$ donc $\boxed{-16,4°\text{C}}$ (bien sûr si on avait fait un tableau de valeurs en 1) on avait déjà la réponse).

**Exercice 8 — Probabilités** **16 points**

Marie s'est abonnée à deux services de vidéo à la demande : Matflix et PI TV+. Un soir de libre, elle décide d'inviter son amie Catherine à regarder des séries de science-fiction. Catherine arrive bientôt, donc Marie commence à chercher une série intéressante.

La probabilité qu'elle choisisse Matflix est de 80%.

Si elle choisit Matflix, la probabilité qu'elle trouve une série intéressante avant l'arrivée de Catherine est de 40%.

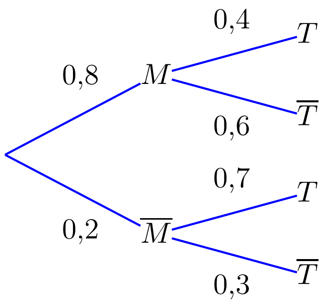
Si elle choisit PI TV+, cette probabilité est de 70%.

Dans la suite de l'énoncé, on note :

- M = « Marie choisit Matflix »
- T = « Marie trouve une série intéressante avant l'arrivée de Catherine »

| | |
|---|---|
| 4 points | 1. Faire un arbre pour illustrer la situation. |
| 3 points | 2. Calculer la probabilité de l'événement « Marie choisit Matflix mais Catherine arrive avant que Marie ne trouve une série intéressante ». |
| 3 points | 3. Quelle est la probabilité que Marie trouve une série intéressante avant que Catherine n'arrive ? |
| 4 points | 4. Quelle est la probabilité que Marie ait choisi Matflix si l'on sait que Catherine est arrivée avant que Marie ne trouve une série intéressante ? Donner le résultat avec une précision de deux décimales. |
| 2 points | 5. Est-ce que les événements M et T sont indépendants ? Justifier. |

1. On peut modéliser la situation par l'arbre de probabilités suivant :




2. On nous demande ici la probabilité de l'événement $M \cap \overline{T}$, qui est la deuxième branche de l'arbre. Donc $P(M \cap \overline{T}) = 0,8 \times 0,6 = \boxed{0,48}$.
3. On nous demande ici la probabilité de l'événement $T$, qui est sur la première et la troisième branche de l'arbre. Donc $P(T) = 0,8 \times 0,4 + 0,2 \times 0,7 = \boxed{0,46}$.
4. On nous demande ici la probabilité de l'événement $M$, sachant l'événement $\overline{T}$. On calcule à l'aide de la formule $P_{\overline{T}}(M) = \dfrac{P(\overline{T} \cap M)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,48}{1 - 0,46} \approx \boxed{0,89}$.
5. $\boxed{M \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendants}}$ car l'énoncé nous dit que $P_M(T) = 0,4$ alors que $P_{\overline{M}}(T) = 0,7$, qui sont donc deux nombres différents.

   On pouvait aussi dire que $P_{\overline{T}}(M)$, qu'on vient de calculer, est différent de $P(M)$, ou encore que $P(T \cap M)$ est différent de $P(T) \times P(M)$...