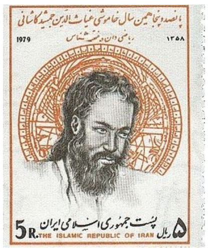
Exercice 2.19*

Indication :
$\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

Un piédestal surmonté d'une statue est érigé au bord d'une rivière. Le piédestal a pour hauteur 12.5 m et la statue 15.2 m. Un chat placé sur l'autre bord de la rivière voit sous un même angle la statue et le piédestal (on admettra que les yeux du chat sont au niveau du pied du piédestal).
Quelle est la largeur de la rivière ?

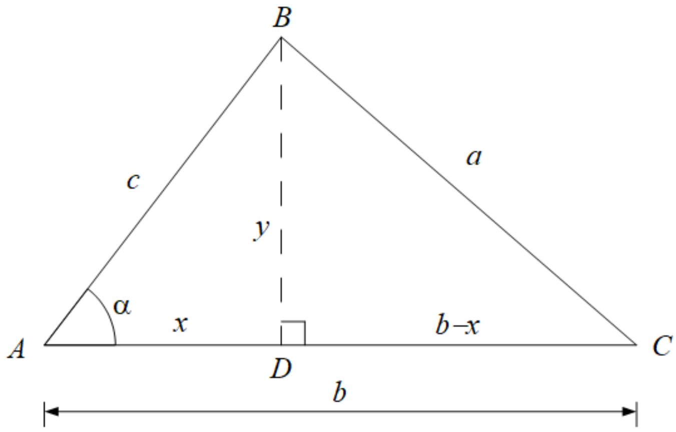
2.5. Triangles quelconques

Le théorème du cosinus est aussi connu sous le nom de **théorème d'al-Kashi** ou encore **théorème de Pythagore généralisé**.



Jamshid **al-Kashi**
(1380 – 1429)

Nous allons utiliser les deux triangles ci-dessous pour trouver deux théorèmes, appelés **théorème du sinus** et **théorème du cosinus**.



Théorème du cosinus

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle rectangle *BCD*

On a : $\cos(\alpha)=\dfrac{x}{c} \Rightarrow x=c\cdot\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)=\dfrac{y}{c} \Rightarrow y=c\cdot\sin(\alpha)$

$$\begin{aligned} a^2 &= (b-x)^2+y^2 \\ &= (b-c\cdot\cos(\alpha))^2+(c\cdot\sin(\alpha))^2 \\ &= (b^2-2bc\cdot\cos(\alpha)+c^2\cdot\cos^2(\alpha))+(c^2\cdot\sin^2(\alpha)) \\ &= b^2+c^2\cdot(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha))-2bc\cdot\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Comme $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$, nous avons la relation :

Théorème du cosinus

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos(\alpha)$$

En faisant une permutation cyclique des lettres *a*, *b*, *c* et α, β, γ, nous obtenons les formules pour b^2 et c^2 (voir résumé page suivante).

Théorème du sinus

Utilisons à nouveau les deux triangles donnés plus haut pour trouver deux expressions de la longueur *y*.

$\sin(\alpha)=\dfrac{y}{c}$ et $\sin(\gamma)=\dfrac{y}{a}$ nous conduit à deux expressions de *y* :

$y=c\cdot\sin(\alpha)$ et $y=a\cdot\sin(\gamma)$.

Ce qui nous donne : $a\cdot\sin(\gamma)=c\cdot\sin(\alpha) \Rightarrow \dfrac{a}{\sin(\alpha)}=\dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

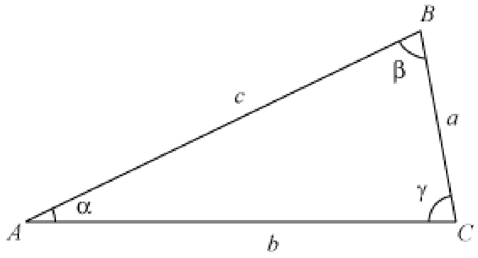
Un raisonnement similaire donne la relation $\dfrac{a}{\sin(\alpha)}=\dfrac{b}{\sin(\beta)}$ qui, combinée avec le premier résultat, nous fournit :

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Résumé

Remarquez bien que a est toujours opposé à α, b à β et c à γ !



Dans un triangle quelconque, on a, en utilisant les notations du dessin ci-dessus :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Attention ! Dans un triangle, il y a deux solutions pour l'équation $\sin(\alpha) = k$:

$\alpha_1 = \arcsin(k)$

$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Aire d'un triangle quelconque

Démontrez cette formule !

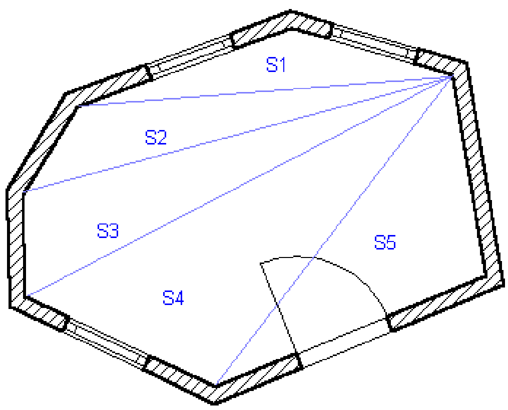
$$S = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ca\sin(\beta)$$

Héron d'Alexandrie (fin du 1er siècle après J.-C.) a démontré cette formule déjà connue d'Archimède.

Formule d'Héron (aire d'un triangle connaissant ses trois côtés)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Calculer l'aire d'une pièce ou d'un terrain n'est pas toujours facile, puisque les pièces sont rarement des triangles ou des rectangles parfaits. Une manière de faire classique est de créer une *triangulation* : on découpe la pièce en triangles, dont il sera facile de calculer les aires avec la formule d'Héron (il faudra juste mesurer les longueurs des côtés des triangles). En additionnant toutes ces aires, on obtiendra l'aire totale.



Exercice 2.20

Résolvez les triangles ABC ci-dessous, puis calculez leur aire.

Attention ! Le théorème du sinus est dangereux pour calculer les angles, car il y a deux solutions possibles. Par contre, pas de souci pour calculer les côtés.

a.	$a = 70.24$	$b = 82.12$	$\gamma = 30.69°$
b.	$\beta = 58.25°$	$\gamma = 39.38°$	$a = 20.46$
c.	$a = 41.94$	$b = 96.92$	$c = 107.26$
d.	$a = 20.43$	$b = 5.63$	$c = 27.84$
e.	$\beta = 30.65°$	$a = 98.06$	$b = 364.04$
f.	$\beta = 39.37°$	$a = 460.14$	$b = 335.59$

Exercice 2.21

rayon de la Terre : 6370 km

Un observateur, couché sur le sol, voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km au-dessus de la surface de la Terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur ?

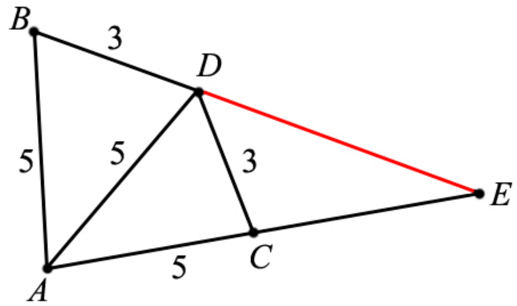
Exercice 2.22

Un bateau quitte le port à 13h00 et fait route dans la direction 55°W à la vitesse de 38 km/h (les angles sont mesurés avec la direction N). Un deuxième bateau quitte le même port à 13h30 et vogue dans la direction 70°E à 28.5 km/h.
Calculez la distance séparant les bateaux à 15h00.

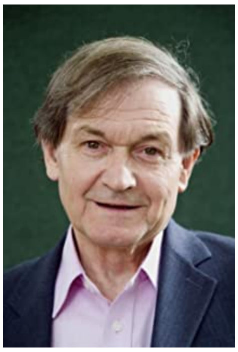
Exercice 2.23

Les proportions du dessin ne sont pas exactes.

Soit le triangle ABE ci-dessous contenant trois petits triangles. Quelle est la longueur du segment $\overline{DE}$?



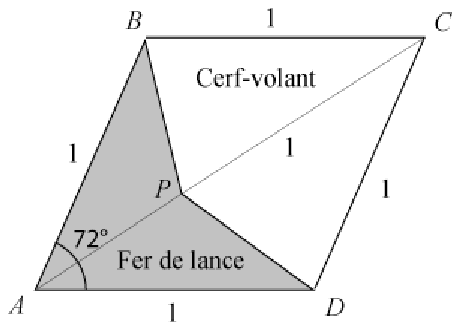
Exercice 2.24



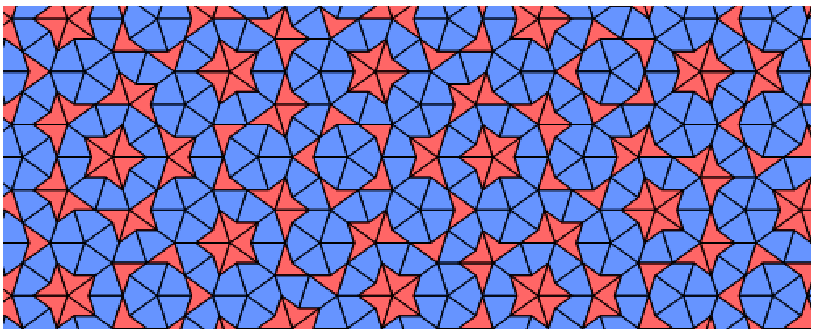
Roger **Penrose**
(né en 1931)

Physicien et mathématicien britannique, prix Nobel de physique en 2020.
En 1974, il publie un article où il présente ses premiers pavages non périodiques : les **pavages de Penrose** (*Pentaplexity*, Bulletin of the Institute for Mathematics and its Applications, 10, 266-271, 1974).

Les pavés de *Penrose* ont la forme d'un losange $ABCD$ dont la longueur des côtés est 1 et dont un angle intérieur fait 72°. On situe un point P sur la diagonale AC à une distance 1 du sommet C. De ce point partent les deux segments de droite PB et PD rejoignant les deux autres sommets du losange, comme le montre la figure ci-dessous. Les deux pavés ainsi formés sont appelés « fer de lance » et « cerf-volant ».

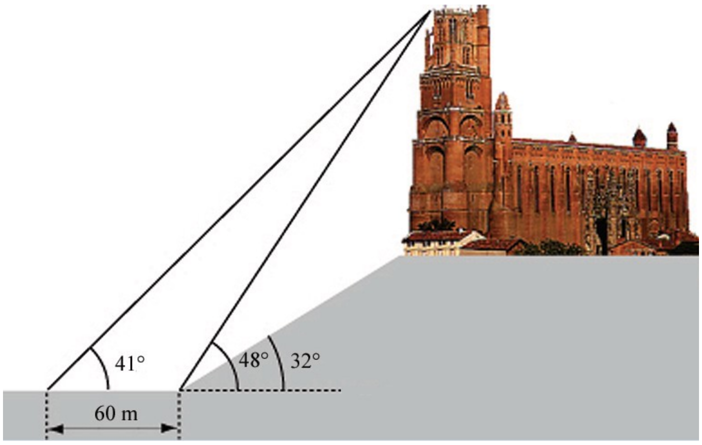


a. Calculez les mesures en degrés des angles $\widehat{BPC}$, $\widehat{APB}$ et $\widehat{ABP}$.
b. Calculez la longueur du segment BP à 0.001 près. Quel est ce nombre ?
c. Calculez l'aire d'un fer de lance et d'un cerf-volant à 0.01 près.



Pavage apériodique de Penrose composé de cerfs-volants et de fers de lance

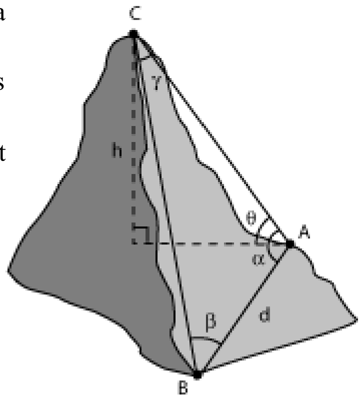
Exercice 2.25 Une basilique est située au sommet d'une colline (voir schéma ci-dessous). Quelle est la hauteur de cette basilique ?



Exercice 2.26 Pour déterminer l'altitude du sommet C d'une montagne, on choisit deux points A et B au bas de la montagne d'où l'on voit le sommet.
A et B ne sont pas forcément à la même altitude, mais ils sont séparés d'une distance d.
On mesure les angles $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et l'angle d'élévation θ sous lequel on voit C depuis A.

Quelle est l'altitude de C si celle de A est h_A ?

Application numérique :
$d = 450$ m, $h_A = 920$ m,
$\alpha = 35.4°$, $\beta = 105.8°$, $\theta = 23.5°$



2.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Utiliser le cercle trigonométrique pour définir le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle ❏ ok
Convertir des degrés en radians et vice-versa ❏ ok
Résoudre des triangles rectangles ❏ ok
Connaître et appliquer le théorème du sinus ❏ ok
Connaître et appliquer le théorème du cosinus ❏ ok
Résoudre des triangles quelconques ❏ ok