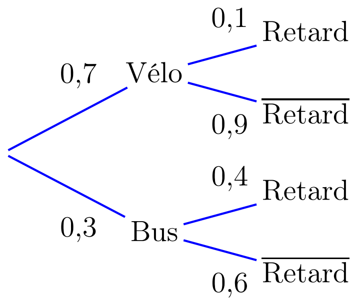
**Exercice 1 — Probabilités (2019, avec calc., 12 points)**

a) Avec l'indication supplémentaire, Jonathan prend soit le vélo soit le bus, donc les deux événements forment une partition de l'univers (ils sont incompatibles et leur union fait $\Omega$), donc $P(\text{Bus}) = 1 - P(\text{Vélo}) = 0,3$. On obtient donc l'arbre suivant :




b) On l'a calculée à la question précédente, la probabilité que Jonathan prenne le bus pour aller à l'école est de $\boxed{0,3}$.

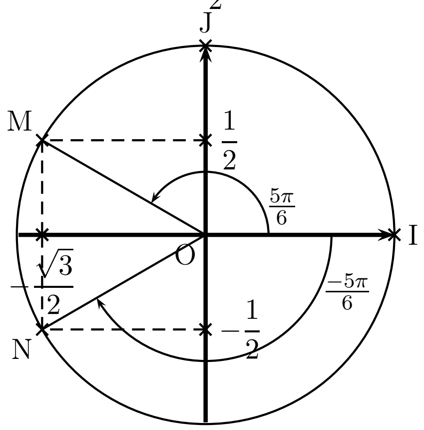
c) Il s'agit de la 3e branche de l'arbre. La probabilité que Jonathan prenne le bus et arrive en retard à l'école vaut $P(\text{Bus} \cap \text{Retard}) = 0,3 \times 0,4 = \boxed{0,12}$.

d) Il s'agit des branches 1 et 3 de l'arbre. La probabilité que Jonathan soit en retard à l'école vaut $P(\text{Retard}) = 0,7 \times 0,1 + 0,12 = \boxed{0,19}$.

e) On demande de calculer $P_{\text{Retard}}(\text{Vélo})$ ce qu'on peut calculer par la formule $\dfrac{P(\text{Retard} \cap \text{Vélo})}{P(\text{Retard})} = \dfrac{0,7 \times 0,1}{0,19} \approx \boxed{0,37}$.

**Exercice 2 — Trigonométrie (2019, sans calc., 10 points)**

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est une valeur remarquable pour cosinus, il s'agit de l'angle $\dfrac{5\pi}{6}$ (c'est le symétrique de l'angle $\dfrac{\pi}{6}$ correspondant à un cosinus de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$). En degrés, c'est donc 150°.



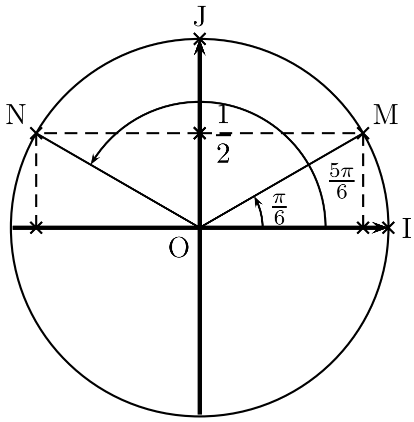

Par symétrie, l'autre solution est $-150°$. $\boxed{\mathcal{S} = \{150°; -150°\}}$.

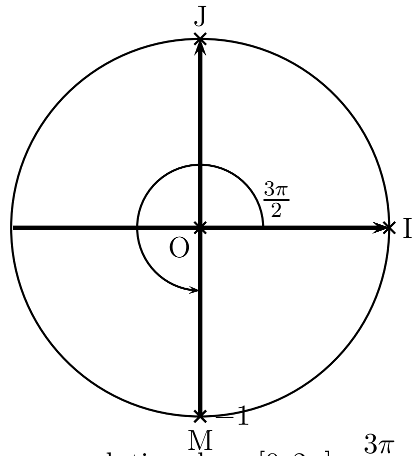
b) Pour résoudre une équation de ce type, la méthode à connaître est de faire le changement de variable $X = \sin(x)$ pour aboutir à une équation du 2nd degré.

$$\begin{aligned} 2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 &= 0 \\ 2X^2 + X - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{On pose } X = \sin(x)$$

Ici $a = 2$, $b = 1$ et $c = -1$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 8 = 9$. Donc on a deux solutions $X_{\pm} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}$ et $-1$.

Maintenant qu'on a trouvé les solutions avec la variable $X = \sin(x)$, il faut trouver les solutions avec la variable $x$. On est donc ramenés à deux équations : $X = \dfrac{1}{2}$ demande de résoudre $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ (à gauche) et $X = -1$ demande de résoudre $\sin(x) = -1$ (à droite).




Ici, il y a deux solutions dans $[0; 2\pi]$ : $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$. Ici, il y a une solution dans $[0; 2\pi]$ : $\dfrac{3\pi}{2}$.

Au final, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2}\right\}}$.

c) On connaît $\sin(a)$ et on cherche $\sin(2a)$. La seule formule que l'on connaît qui lie ces deux quantités vient de la formule $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, ici appliquée à $a = b$, c'est-à-dire $\sin(2a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a)$ donc $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

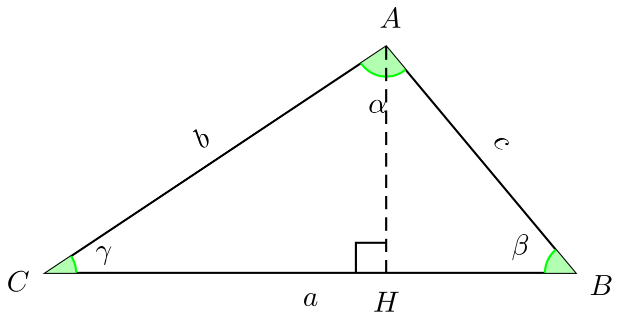
Pour trouver $\sin(2a)$, on a donc maintenant pour tâche de trouver $\cos(a)$. Et ça on a l'habitude, on utilise la formule $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$. Puisque $\sin(a) = \dfrac{1}{4}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\cos^2(a) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 &= 1 \\
\cos^2(a) + \frac{1}{16} &= 1 && \text{Élévation au carré} \\
\cos^2(a) &= \frac{15}{16} && -\frac{1}{16} \\
\cos(a) &= \pm\sqrt{\frac{15}{16}} && \text{Résolution de l'équation}
\end{aligned}$$

Or, on sait que $a \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, et dans ce quart de cercle, les cosinus sont positifs. Ainsi, $\cos(a) = \sqrt{\dfrac{15}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Il vient $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) = 2 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \boxed{\dfrac{\sqrt{15}}{8}}$.

**Exercice 3 — 85 p.214 de votre livre de 1e (15 points)**

1.




2. (a) Dans le triangle $ABH$, on peut écrire que $\sin(\beta) = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AH}{c}$.

(b) L'aire du triangle $ABC$, en considérant $BC = a$ comme base et $AH = c \times \sin(\beta)$ comme hauteur (d'après la question précédente), est $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \times a \times c\sin(\beta)$.

(c) En considérant toujours $AH$ mais maintenant l'angle $\gamma$, j'obtiens également $\sin(\gamma) = \frac{AH}{b}$ d'où $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$.

Ensuite, le calcul qu'on vient de faire (qui est le même qu'en 2)a)b)) est bien sûr symétrique : si je construis $I$, le pied de la hauteur issue de $B$, alors j'obtiens la relation $\sin(\alpha) = \frac{BI}{c}$ d'où $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$.

Enfin, comme ces trois formules donnent toutes les trois l'aire du même triangle, elles sont égales :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta) = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$

En multipliant chaque membre par 2 il vient :

$$ac\sin(\beta) = ab\sin(\gamma) = bc\sin(\alpha)$$

On peut maintenant diviser chaque membre par $abc$ et il vient :

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{a}$$

3. (a) Dans le triangle $ACH$ rectangle en $H$, on peut appliquer le théorème de Pythagore, ce qui donne :

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

(b) En 1) on a écrit $AH = c\sin(\beta)$. On nous demande une formule ne faisant intervenir que les côtés et $\beta$, si on veut utiliser la question 3)a) il faut donc aussi déterminer $HC$ en fonction des 3 côtés et de l'angle $\beta$. Du coup, on écrit que $HC = a - BH = a - c\cos(\beta)$. On peut maintenant tout remplacer :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= AH^2 + HC^2 && \text{On remplace} \\
b^2 &= (c\sin(\beta))^2 + (a - c\cos(\beta))^2 && \text{On développe} \\
b^2 &= c^2\sin^2(\beta) + a^2 + c^2\cos^2(\beta) - 2ac\cos(\beta) && \text{On met les termes en } c^2 \text{ ensemble} \\
b^2 &= c^2(\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta)) + a^2 - 2ac\cos(\beta) && \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \\
b^2 &= c^2(1) + a^2 - 2ac\cos(\beta) && \text{On a retrouvé la formule} \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)
\end{aligned}$$

4. Je pense qu'il y a une erreur car si on demande de calculer $AC = b$, on aurait sûrement donné l'angle $\widehat{ABC}$ et pas l'angle $\widehat{BAC}$. Comme on l'a vu en cours, si on veut appliquer le théorème d'al-Kashi en ne connaissant pas $a$, $c$ et $\beta$, c'est possible, mais ça demande de résoudre une équation du second degré.

Il est donc plus simple, ici, de d'abord trouver les mesures des angles, puis de déduire $AC$. Pour trouver les mesures des angles, on va utiliser la loi des sinus (question 2)c)) :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\beta)}{b} &= \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{a} && \text{On remplace par ce qu'on connaît} \\
\frac{\sin(\beta)}{b} &= \frac{\sin(\gamma)}{3} = \frac{\sin(83°)}{8} && \times 3 \\
\sin(\gamma) &= \frac{3\sin(83°)}{8} && \text{Valeur approchée} \\
\sin(\gamma) &\approx 0,372204807 && arcsin \\
\gamma &\approx 21,851657847° \text{ ou } 158,148342153°
\end{aligned}$$

Comme $\alpha = 83°$, et que la somme des angles fait $180°$, la seule valeur possible est donc $\boxed{\gamma \approx 21,851657847°}$. On en déduit donc la valeur $\beta = 180 - \alpha - \gamma \approx \boxed{75,148342153°}$.

On peut maintenant appliquer la formule d'al-Kashi :
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3\cos(75,148342153°) \approx 60,696767609$

Cela donne donc $\boxed{b \approx 7,790813026}$.

PS : Juste pour se rappeler que c'est possible, on va quand même trouver $AC = b$ à partir de la relation d'al-Kashi utilisant l'angle $\alpha$ (en connaissant donc, comme ici, $a$, $c$ et $\alpha$) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$8^2 = b^2 + 3^2 - 2 \times b \times 3\cos(83°)$$

Valeur approchée

$$64 = b^2 + 9 - 0,73121606b$$

On fait apparaître l'équation du second degré

$$0 = b^2 - 0,73121606b - 55$$

Ici on a donc une équation du second degré, si je renomme $b$ en $x$ :

$$x^2 - 0,73121606x - 55 = 0$$

Ici (en prenant les notations des équations du second degré, et plus les notations du triangle) $a = 1$, $b = -0,73121606$ et $c = -55$ donc $\Delta = b^2 - 4ac \approx (-0,73121606)^2 - 4 \times 1 \times (-55) \approx 220,534676926$. Donc on a deux solutions $x_{\pm} \approx \dfrac{0,73121606 \pm \sqrt{220,534676926}}{2 \times 1}$ c'est-à-dire $-7,059596966$ et $7,790813026$. Ici on ne garde bien sûr que la solution positive car c'est une longueur, c'est bien la longueur qu'on avait trouvé tout à l'heure bien sûr. Comme vous le voyez, cette technique est bien plus compliquée, donc s'il vous plaît, n'utilisez le théorème d'al-Kashi que pour trouver la longueur d'un côté quand vous connaissez les deux autres longueurs et l'angle opposé !