Test B de S5P6, juin 2021 (Sans calculatrice : exercices 1–3 ; Avec calculatrice : exercices 4–8) Sujets et corrections

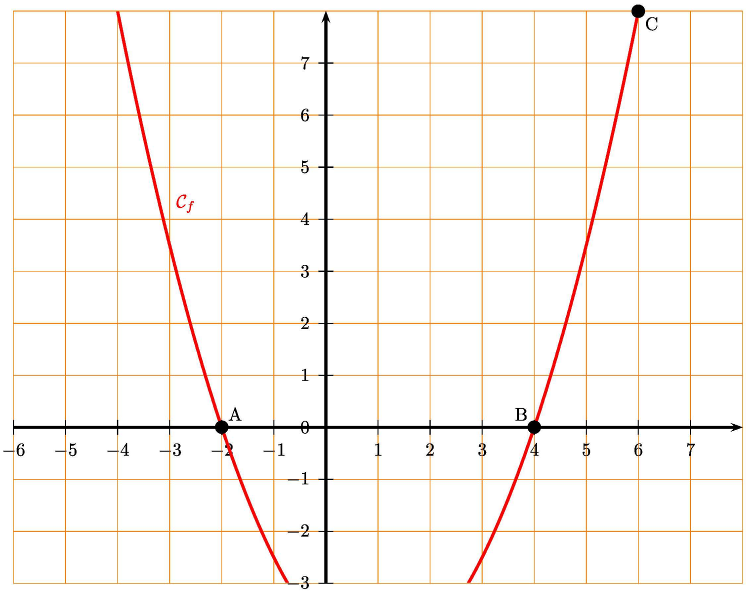
1 Sans calculatrice

Exercice 1 — Modèles et formules quadratiques **12 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

6 points — (a) $-3x^2 + x = 0$ (b) $2x^2 + 3x + 4 = 0$ (c) $(x-2)^2 - 4 = 0$

2. Soit f une fonction polynomiale de degré 2 de la forme ax^2+bx+c dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-contre.
Remarque : les points A, B, et C sont tous sur le quadrillage et sont sur $\mathcal{C}_f$.



1 point — (a) Déterminer le signe de « a » et le signe du discriminant « Δ ».

3 points — (b) Déterminer une expression de $f(x)$ en justifiant vos raisonnements. (On donnera, au choix, l'une des trois formes suivantes : la forme canonique, factorisée ou développée.)

2 points — (c) Écrivez l'équation de l'axe de symétrie de cette courbe, et donner les coordonnées du sommet (non visible sur le graphique).

1. (a) Dans l'équation $-3x^2 + x = 0$, les coefficients sont $a = -3$, $b = 1$ et $c = 0$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-3) \times 0 = 1 + 0 = 1$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-1 \pm 1}{-6}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \left\{0; \frac{-2}{-6}\right\}}$ (on pouvait simplifier en $\boxed{\mathcal{S} = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}}$). On pouvait aussi directement reconnaître la factorisation $-3x^2 + x = x(-3x+1)$.

(b) Dans l'équation $2x^2 + 3x + 4 = 0$, les coefficients sont $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23$. Donc on n'a aucune solution réelle, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

(c) Dans l'équation $(x-2)^2 - 4 = 0$, on peut soit développer pour faire apparaître les coefficients et résoudre comme au-dessus, soit reconnaître l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, soit encore laisser le carré avec le x d'un côté.

- On développe : $(x-2)^2 - 4 = x^2 + 2^2 - 2 \times x \times 2 - 4 = x^2 + 4 - 4x - 4 = x^2 - 4x$. Du coup les coefficients sont $a = 1$, $b = -4$ et $c = 0$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 16 + 0 = 16$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} = \dfrac{4 \pm 4}{2}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \{0; 4\}}$.
- Avec l'identité remarquable : $(x-2)^2 - 4 = (x-2)^2 - 2^2 = (x-2+2)(x-2-2) = x(x-4)$. Du coup, $x(x-4) = 0$, c'est un produit de facteurs nul, qui est nul si et seulement l'un des facteurs est nul. On a soit $x = 0$, soit $x - 4 = 0$, d'où également $\boxed{\mathcal{S} = \{0; 4\}}$.
- Enfin on pouvait aussi résoudre à la main :

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 - 4 &= 0 \\
(x-2)^2 &= 4 && +4 \\
x - 2 &= \pm\sqrt{4} && a^2 = b \text{ avec } b > 0 \text{ équivaut à } a = \pm\sqrt{b} \\
x &= \pm 2 + 2 && +2
\end{aligned}$$

On retrouve également $\boxed{\mathcal{S} = \{0; 4\}}$.

2. (a) La parabole $\mathcal{C}_f$ est tournée vers le haut, donc $\boxed{a > 0}$.

La parabole $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points, donc $f(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes, ainsi $\boxed{\Delta > 0}$.

(b) On lit sur le graphique que $\mathrm{A}(-2; 0)$ et $\mathrm{B}(4; 0)$ sont les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, donc cela nous enjoint à utiliser la forme factorisée :

$$f(x) = a(x - (-2))(x - 4) = a(x + 2)(x - 4)$$

Pour trouver la valeur de a, on utilise le point $\mathrm{C}(6; 8)$. Effectivement on sait alors que :

$$\begin{aligned}
f(6) &= 8 && \text{On remplace } x \text{ par 6 dans l'expression de } f(x)\\
a(6+2)(6-4) &= 8 && \text{On simplifie}\\
a(8)(2) &= 8 && \text{On calcule}\\
16a &= 8 && \div 16\\
a &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

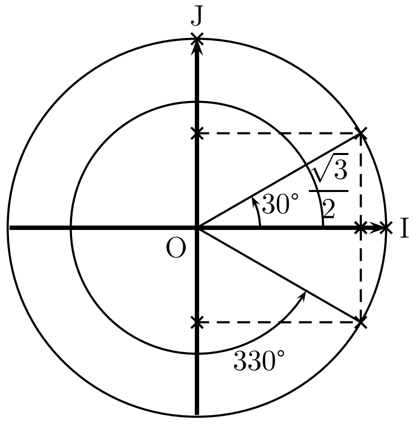
Ainsi on trouve $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 4)}$.

(c) L'axe de symétrie se situe au milieu des deux racines, donc ici son équation est $\boxed{x = 1}$. Du coup le sommet, c'est le point de $\mathcal{C}_f$ à l'abscisse 1, et $f(1) = \frac{1}{2}(1 + 2)(1 - 4) = \frac{1}{2} \times 3 \times (-3) = -4,5$. C'est donc le point $\boxed{(1; -4,5)}$.

Exercice 2 — Équations trigonométriques — 9 points

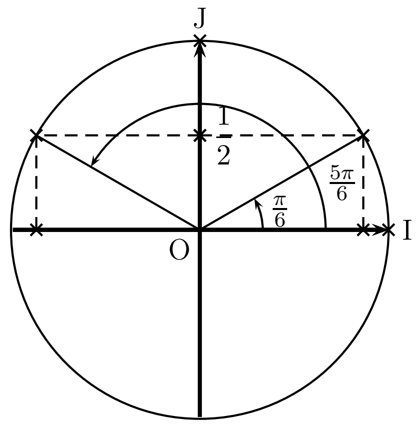
	Résoudre les équations suivantes :
3 points	1. $2\cos(x) = \sqrt{3}$, pour $x \in [0; 360°]$
3 points	2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, pour $x \in [0; 2\pi]$
3 points	3. $\cos^2(x) - 1 = 0$, pour $x \in [0; 4\pi]$

1. Résoudre $2\cos(x) = \sqrt{3}$, c'est résoudre $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, qui est une valeur remarquable :



Ici, il y a deux solutions dans $[0; 360°]$: $\boxed{\mathcal{S} = \{30°; 330°\}}$.

2. $\frac{1}{2}$ est aussi une valeur remarquable :



Ici, l'angle $x + \frac{\pi}{3}$ vaut donc, à 2π près, $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$. Du coup, on a soit $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ ce qui donne $x = -\frac{\pi}{6}$ donc $\frac{11\pi}{6}$, soit $x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ ce qui donne $x = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

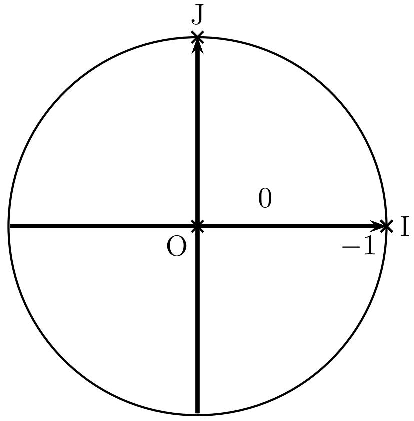
Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right\}}$.

3. Pour résoudre une équation de ce type, la méthode à connaître est de faire le changement de variable $X = \cos(x)$ pour aboutir à une équation du 2nd degré.

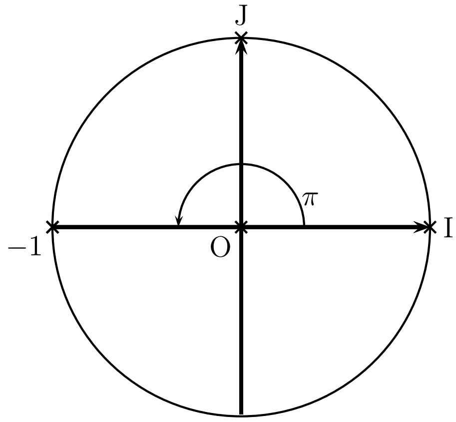
$$\begin{aligned}
\cos^2(x) - 1 &= 0 && \text{On pose } X = \cos(x)\\
X^2 - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Ici on peut reconnaître l'identité remarquable ce qui donne $(X+1)(X-1)=0$ ou bien sinon calculer le discriminant : les coefficients sont $a=1$, $b=0$ et $c=-1$ donc $\Delta = b^2-4ac = 0^2-4\times 1\times(-1) = 0+4=4$. Donc on a deux solutions $X_{\pm} = \dfrac{-0\pm\sqrt{4}}{2\times 1} = \dfrac{\pm 2}{2}$ c'est-à-dire 1 et -1.

Maintenant qu'on a trouvé les solutions avec la variable $X=\cos(x)$, il faut trouver les solutions avec la variable x. On est donc ramenés à deux équations : $X=1$ demande de résoudre $\cos(x)=1$ (à gauche) et $X=-1$ demande de résoudre $\cos(x)=-1$ (à droite).



Ici, il y a trois solutions dans $[0;4\pi]$: 0, 2π et 4π.



Ici, il y a deux solutions dans $[0;4\pi]$: π et 3π.

Au final, $\boxed{\mathcal{S}=\{0;\pi;2\pi;3\pi;4\pi\}}$.

Exercice 3 — Probabilités **6 points**

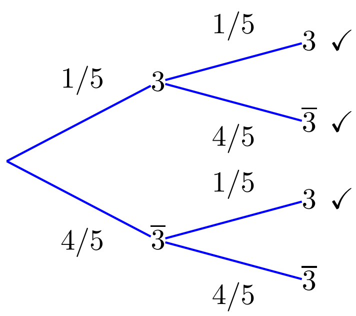
	On est face à une urne opaque contenant 5 jetons numérotés de 1 à 5. Une expérience aléatoire consiste à tirer à la suite et avec remise deux jetons de cette urne. Les jetons sont indiscernables au toucher.
	Calculer les probabilités des événements suivants, en exprimant les résultats sous forme de fraction :
2 points	1. A = « Les deux jetons tirés sont différents » ;
2 points	2. B = « La somme des résultats vaut 4 » ;
2 points	3. C = « On a obtenu un 3 au premier jeton ou au deuxième ».

1. Le tirage est avec remise. Au 2e tirage, il y a une probabilité $\boxed{P(\mathrm{A})=\dfrac{4}{5}}$ de tirer un jeton différent du premier.
2. Pour l'événement B, on peut écrire un tableau à double entrée répertoriant toutes les sommes différentes. Ensuite, on a mis en rouge les issues qui correspondent à B :

Jeton 2 / Jeton 1	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

On voit dans le tableau qu'on a 3 issues favorables sur 25 issues en tout, d'où $\boxed{P(\mathrm{B})=\dfrac{3}{25}}$.

3. Pour l'événement C, on peut faire un arbre à deux étages (un étage par jeton), en séparant le fait d'obtenir un 3 ou pas :

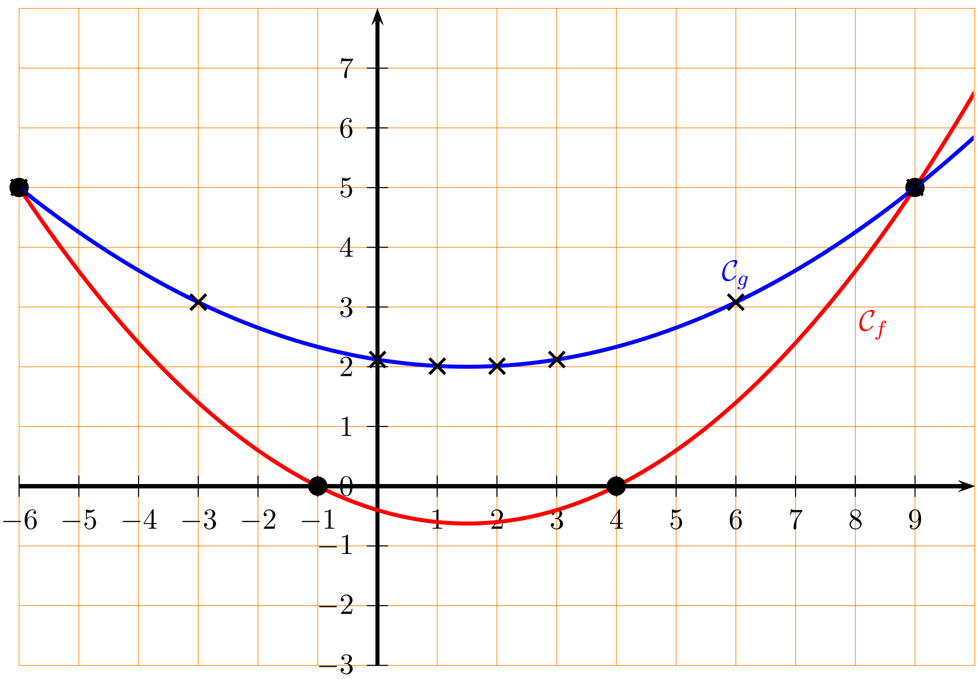


On peut voir que les 3 branches du haut correspondent à l'événement C, ou bien que la branche du bas correspond à l'événement $\overline{\text{C}}$ ce qui donne dans tous les cas $P(\text{C}) = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \boxed{\frac{9}{25}}$.

2 Avec calculatrice

Exercice 4 — Modèles et formules quadratiques **16 points**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé $\mathcal{C}_f$, la courbe d'une fonction f. Les quatre points marqués sont des points du quadrillage qui sont sur $\mathcal{C}_f$.



1. On souhaite trouver une forme factorisée de $f(x)$

$$f(x) = a(x - r)(x - s)$$

3 points (a) À l'aide du graphique, identifier les racines de f et déduire les valeurs de r et s.

2 points (b) À l'aide d'un autre point de $\mathcal{C}_f$, trouver la valeur de a.

2. On donne la forme développée de $f(x)$

$$f(x) = 0,1x^2 - 0,3x - 0,4$$

2 points (a) Montrer que les coordonnées du sommet S_1 de $\mathcal{C}_f$ sont $(1,5; -0,625)$.

3 points (b) Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2$ et calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{C}_f$.

3. On donne maintenant la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{4}{75}(x - 1,5)^2 + 2$$

4 points (a) Remplir le tableau de valeurs de g suivant (directement sur le sujet) :

x	-6	-3	0	1	2	3	6	9
$g(x)$	5	$3,08$	$2,12$	$\approx 2,01$	$\approx 2,01$	$2,12$	$3,08$	5

2 points (b) Tracer $\mathcal{C}_g$ sur le graphique.

1. (a) On lit sur le graphique que $(-1; 0)$ et $(4; 0)$ sont les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, donc on trouve la forme factorisée $f(x) = a(x - (-1))(x - 4) = a(x + 1)(x - 4)$.

   (b) Pour trouver la valeur de a, on utilise par exemple le point $(9; 5)$. Effectivement on sait alors que :

$$\begin{aligned} f(9) &= 5 && \text{On remplace } x \text{ par 9 dans l'expression de } f(x)\\ a(9+1)(9-4) &= 5 && \text{On simplifie}\\ a(10)(5) &= 5 && \text{On calcule}\\ 50a &= 5 && \div 50\\ a &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Ainsi on trouve $\boxed{f(x) = \frac{1}{10}(x+1)(x-4)}$.

2. (a) Une parabole pour laquelle $a = 0,1$ et pour laquelle le sommet est en $(1,5; -0,625)$ a pour équation $y = 0,1(x-1,5)^2 - 0,625$. On va vérifier que cela donne bien la même expression que $f(x)$: $0,1(x-1,5)^2 - 0,625 = 0,1 \times (x^2 - 2 \times x \times 1,5 + 1,5^2) - 0,625 = 0,1(x^2 - 3x + 2,25) - 0,625 = 0,1x^2 - 0,3x + 0,225 - 0,625 = 0,1x^2 - 0,3x - 0,4 = f(x)$.

   (b) Pour calculer les points d'intersection, il faut résoudre l'équation $f(x) = 2$. Cela donne $0,1x^2 - 0,3x - 0,4 = 2$ c'est-à-dire $0,1x^2 - 0,3x - 2,4 = 0$. Dans cette équation, les coefficients sont $a = 0,1$, $b = -0,3$ et $c = -2,4$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-0,3)^2 - 4 \times 0,1 \times (-2,4) = 0,09 + 0,96 = 1,05$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \frac{-(-0,3) \pm \sqrt{1,05}}{2 \times 0,1} = \frac{0,3 \pm \sqrt{1,05}}{0,2}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{0,3-\sqrt{1,05}}{0,2}; \frac{0,3+\sqrt{1,05}}{0,2}\right\}}$.

   Les points d'intersection sont donc les points $\boxed{\left(\frac{0,3-\sqrt{1,05}}{0,2}; 2\right) \text{ et } \left(\frac{0,3+\sqrt{1,05}}{0,2}; 2\right)}$ ou de manière approchée $\boxed{(-3,62; 2) \text{ et } (6,62; 2)}$.

3. (a) On a rempli le tableau sur le sujet. Notons que, puisque l'axe de symétrie est en $x = 1,5$, les valeurs à calculer étaient symétriques, donc on ne pouvait faire que la moitié des calculs.

   (b) On n'a plus qu'à placer les points et à relier, ce qui est fait sur le graphique.

Exercice 5 — Probabilités **16 points**

	Dans une école de 500 élèves, 350 jouent au football et 100 au tennis.
	La probabilité qu'un élève choisi au hasard ne joue pas au football ni au tennis est de $\frac{1}{5}$.
2 points	1. Montrer que le nombre d'élèves qui ne jouent ni au football ni au tennis est 100.
4 points	2. Faire un tableau ou un diagramme de Venn pour collecter toutes les données.
3 points	3. Trouvez la probabilité qu'un élève choisi au hasard joue au football mais pas au tennis.
3 points	4. Trouvez la probabilité qu'un joueur de football ne joue pas au tennis.
4 points	5. Trouvez la probabilité qu'un élève choisi au hasard jouera à l'un ou l'autre des deux sports.

1. Puisque $\frac{1}{5}$ est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ne joue à aucun des deux sports, le nombre d'élèves qui ne jouent à aucun des deux sports est de $\frac{1}{5} \times 500 = 100$.
2. Mise en mathématiques de l'énoncé : ici on peut faire un tableau à double entrée ou un diagramme de Venn (mais un arbre n'est pas vraiment adapté). Le plus simple est le tableau à double entrée, car on peut directement reporter les nombres de l'énoncé ainsi que de la question précédente (en rouge).

Football \ Tennis	Oui	Non	Total
Oui	50	300	350
Non	50	$\frac{1}{5} \times 500 = 100$	150
Total	100	400	500

Pour la suite de l'exercice, si on choisit un élève au hasard dans l'école, on va noter F = « l'élève joue au football » et T = « l'élève joue au tennis ».

3. On demande ici $P(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{T}})$. On lit dans le tableau $\frac{\text{effectif}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{T}})}{\text{effectif total}} = \frac{300}{500} = \boxed{\frac{3}{5}}$.
4. Cette fois-ci on parle d'un élève dont on <u>sait</u> qu'il joue au football. On demande donc $P_{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{T}})$. On lit dans le tableau $\frac{\text{effectif}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{T}})}{\text{effectif}(\mathrm{F})} = \frac{300}{350} = \boxed{\frac{6}{7}}$.

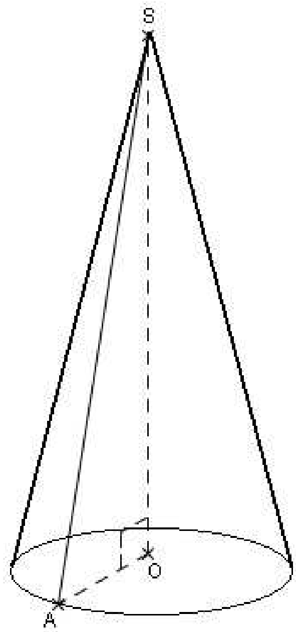
5. On demande ici $P(\mathrm{F} \cup \mathrm{T})$. On lit dans le tableau $\dfrac{\text{effectif}(\mathrm{F} \cup \mathrm{T})}{\text{effectif total}} = \dfrac{400}{500} = \boxed{\dfrac{4}{5}}$.

Exercice 6 — Longueurs et distances dans les objets 3D **12 points**

On considère une bougie dont la forme est un cône de révolution, représentée ci-contre (la figure n'est pas aux dimensions réelles.).

Le rayon OA de sa base est 2,5 cm.

La longueur du segment [SA] est 6,5 cm.



1 point — 1. Sans justifier, donner la nature du triangle SAO.

3 points — 2. Montrer que la hauteur SO de la bougie est 6 cm.

3 points — 3. Calculer le volume de cire nécessaire à la fabrication de cette bougie.
On donnera la valeur arrondie au dixième de cm^3.

N.B. : la formule du volume d'un cône de révolution est

$$\mathcal{V} = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$$

5 points — 4. Déterminer l'angle $\widehat{\mathrm{ASO}}$. On donnera la valeur arrondie au degré.

1. D'après le codage de la figure, $\boxed{\text{SAO est rectangle en O}}$.
2. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle, ce qui donne, en centimètres :

$$\begin{aligned}
\mathrm{SA}^2 &= \mathrm{SO}^2 + \mathrm{AO}^2 \\
6,5^2 &= \mathrm{SO}^2 + 2,5^2 && \text{On remplace par les valeurs} \\
6,5^2 - 2,5^2 &= \mathrm{SO}^2 && -2,5^2 \\
36 &= \mathrm{SO}^2 && \text{On calcule} \\
\pm 6 &= \mathrm{SO} && \text{On résout}
\end{aligned}$$

Du coup, puisque SO est une longueur, on déduit que c'est la solution positive : $\boxed{\mathrm{SO} = 6 \text{ cm}}$.

3. Pour appliquer la formule, on remarque qu'ici, en centimètres, $r = \mathrm{OA} = 2,5$ et $h = \mathrm{SO} = 6$. Donc $\mathcal{V} = \dfrac{\pi 2,5^2 \times 6}{3} \approx 39,3$. Donc il faut environ $\boxed{39,3 \text{ cm}^3 \text{ de cire}}$.
4. Dans le triangle SAO rectangle en O, pour l'angle $\widehat{\mathrm{ASO}}$, AO correspond à la longueur du côté opposé, SO à celle du côté adjacent, SA à l'hypoténuse. On peut utiliser la relation trigonométrique de notre choix. Par exemple $\sin(\widehat{\mathrm{ASO}}) = \dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{SA}} = \dfrac{2,5}{6,5}$ d'où $\widehat{\mathrm{ASO}} = \arcsin\left(\dfrac{2,5}{6,5}\right) \approx \boxed{23°}$ (on peut prendre l'arcsinus car dans un triangle rectangle les autres angles sont $< 90°$).

Exercice 7 — Formules dans un triangle quelconque **16 points**

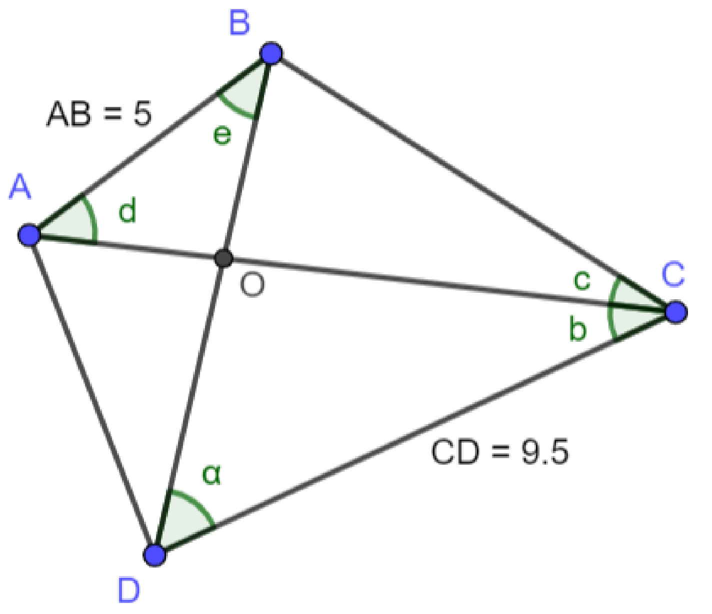
On considère le quadrilatère ABCD tel que :

$$CD = 9,5 \text{ km} ; AB = 5 \text{ km} ;$$
$$\widehat{ODC} = \alpha = 51° ;$$
$$\widehat{OCD} = b = 32° ; \widehat{OAB} = d = 43° ;$$
$$\widehat{OBA} = e = 40° ; \widehat{OCB} = c = 26°.$$

6 points 1. Calculer les distances OA et OC.

6 points 2. Calculer les distances AD et BC.

4 points 3. Calculer l'aire du triangle BOC.



1. Dans le triangle OAB, on connaît 2 angles et 1 longueur, on va donc utiliser la loi des sinus, après avoir calculé le dernier angle $\widehat{AOB} = 180° - 43° - 40° = 97°$.
$$\begin{aligned} \frac{\sin(\widehat{AOB})}{AB} &= \frac{\sin(e)}{OA} && \text{On remplace par ce qu'on connaît} \\ \frac{\sin(97°)}{5} &= \frac{\sin(40°)}{OA} && \times OA \\ OA \times \frac{\sin(97°)}{5} &= \sin(40°) && \times \frac{5}{\sin(97°)} \\ OA &= \frac{5\sin(40°)}{\sin(97°)} && \text{Valeur approchée} \\ &\boxed{OA \approx 3,24} \end{aligned}$$
2. Pour trouver OC, dans le triangle OBC on ne connaît qu'un seul angle, c'est insuffisant pour le résoudre (en fait on pourrait trouver l'angle $\widehat{BOC}$ et la longueur OB pour utiliser ce triangle, mais ça serait un peu long). On va donc plutôt utiliser le triangle OCD, dans lequel on va aussi utiliser la loi des sinus, en calculant au préalable $\widehat{DOC} = 180° - 51° - 32° = 97°$:
$$\begin{aligned} \frac{\sin(\widehat{\alpha})}{OC} &= \frac{\sin(\widehat{DOC})}{CD} && \text{On remplace par ce qu'on connaît} \\ \frac{\sin(51°)}{OC} &= \frac{\sin(97°)}{9,5} && \times OC \\ \sin(51°) &= OC \times \frac{\sin(97°)}{9,5} && \times \frac{9,5}{\sin(97°)} \\ \frac{9,5\sin(51°)}{\sin(97°)} &= OC && \text{Valeur approchée} \\ &\boxed{7,44 \approx OC} \end{aligned}$$
3. Pour trouver AD, dans le triangle AOD on ne connaît qu'un angle et une longueur, c'est insuffisant pour le résoudre (en fait on pourrait trouver la longueur OD pour utiliser ce triangle, mais ça serait un peu long). Par contre on peut directement utiliser le triangle ACD, en utilisant le théorème d'Al-Kashi. Pour ce faire, on a besoin de AC qu'on calcule comme $AC = AO + OC \approx 10,68$ — notons que l'énoncé ne disait pas que A, O et C sont alignés donc en toute rigueur on ne pourrait pas le faire de la sorte, et il aurait fallu utiliser la méthode un peu plus longue :
$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \times AC \times CD \times \cos(b) \approx 32,2$
Du coup $AD \approx \sqrt{32,2} \approx \boxed{5,67}$.

Pour trouver BC, on peut utiliser la loi des sinus dans OBC (ou sinon utiliser le théorème d'Al-Kashi dans ABC comme on vient de faire pour AD) :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\widehat{\mathrm{BOC}})}{\mathrm{BC}} &= \frac{\sin(c)}{\mathrm{OB}} && \text{On remplace par ce qu'on connaît}\\
\frac{\sin(83°)}{\mathrm{BC}} &\approx \frac{\sin(32°)}{3,44} && \times \mathrm{BC}\\
\sin(83°) &\approx \mathrm{BC} \times \frac{\sin(32°)}{3,44} && \times \frac{3,44}{\sin(32°)}\\
\frac{3,44\sin(83°)}{\sin(32°)} &\approx \mathrm{BC} && \text{Valeur approchée}\\
&\boxed{6,44 \approx \mathrm{BC}}
\end{aligned}$$

4. On peut appliquer la formule de l'aire d'un triangle, en km^2 :

$$\mathcal{A}(\mathrm{BOC}) = \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{CO} \times \sin(c) \approx \boxed{10,5}$$

Exercice 8 — Modèles périodiques **6 points**

	La température mensuelle d'une région est modélisée par la fonction : $$T(x) = 19,5\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-7)\right) + 0,5$$ où x est le rang du mois dans l'année (en janvier, $x = 1$).
2 points	1. Montrer que la période de cette fonction est 12.
1 point	2. Déterminer la température mensuelle minimale.
3 points	3. Déterminer la température mensuelle en décembre.

La fonction $T(x) = 19,5\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-7)\right) + 0,5$ est une fonction sinusoïdale.

Attention, pour les fonctions cosinus / sinus / tangente, c'est toujours en radians !

1. On peut retenir que pour une fonction de la forme $f(x) = a\sin(b(x+c)) + d$, la période est $\frac{2\pi}{a}$, donc ici ça donne $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 2\pi \times \frac{6}{\pi} = \boxed{12}$.

   Sinon, on pouvait aussi vérifier que $T(x+12) = T(x)$, ce qui implique que, puisque T n'est pas une fonction constante, c'est une fonction périodique dont 12 est un multiple de la période (et on n'aurait pas demandé davantage… démontrer que 12 est la plus petite valeur > 0 vérifiant cette propriété est difficile).

2. L'énoncé nous invite à penser que la fonction n'est utile que pour des valeurs de x entières. Ainsi, on peut faire un tableau des 12 valeurs utiles de T, et regarder la plus petite :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T(x)$	-19	-16,4	-9,25	0,5	10,25	17,4	20	17,4	10,25	0,5	-9,25	-16,4

   Du coup la température mensuelle minimale est de $\boxed{-19\ °\mathrm{C}}$ (atteinte en janvier).

   Sinon on peut par exemple encadrer les valeurs en démarrant par le fait que les valeurs de cosinus sont toujours entre -1 et 1 :

$$\begin{aligned}
-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}(x-7)\right) &\leq 1 && \times 19,5\\
-19,5 \leq 19,5\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-7)\right) &\leq 19,5 && +0,5\\
-19 \leq 19,5\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-7)\right) + 0,5 &\leq 20
\end{aligned}$$

   Donc la valeur minimale de T est de $\boxed{-19}$ (les valeurs de l'encadrement sont atteintes à chaque fois).

3. Ici, on demande de calculer $T(12)$. Voici le détail du calcul :

   $19,5\cos\left(\frac{\pi}{6}(12-7)\right) + 0,5 = 19,5\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 0,5 = 19,5 \times \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + 0,5 \approx -16,4$ donc $\boxed{-16,4°\mathrm{C}}$ (bien sûr si on avait fait un tableau de valeurs en 1) on avait déjà la réponse).