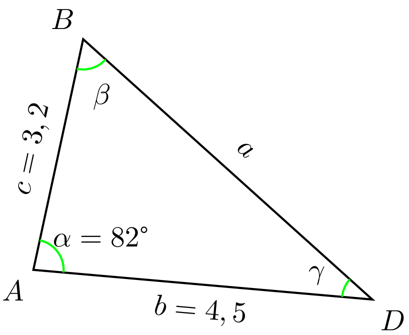
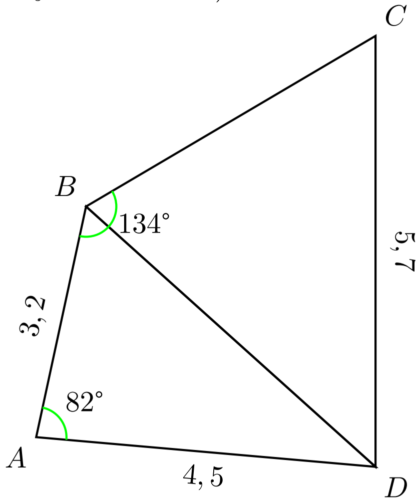
Dans les calculs, j'utilise d'abord des résultats approchés obtenus aux questions précédentes pour continuer les calculs. Ces calculs ne donnent pas la valeur approchée à la précision demandée. Ce qui est certain, c'est qu'on vous aurait compté bon d'avoir fait de la sorte. Je vous montre ensuite qu'en utilisant les valeurs "les plus exactes possibles", on obtient des valeurs différentes à l'arrondi demandé (valeurs approchées, qui, elles, sont donc cette fois les bonnes à la précision demandée). Les calculs un peu plus fastidieux sont mis avec une barre noire sur le côté (comme ce paragraphe), pour que vous puissiez les passer quand vous réviserez pour le test B (c'est pour votre culture scientifique, on ne vous en tiendra pas rigueur le jour du test B).

Exercice 1 : Examen harmonisé 2013.





1. Pour calculer BD, on se place dans le triangle ABD (on peut résoudre ce triangle car on y connaît 3 données indépendantes), avec les notations de la figure de gauche. On connaît deux longueurs de côtés et l'angle entre ces deux côtés connus, on utilise la relation d'al-Kashi pour connaître la longueur du troisième côté :

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) && \text{On remplace par ce qu'on connaît}\\
a^2 &= 4,5^2 + 3,2^2 - 2 \times 4,5 \times 3,2\cos(82°) && \text{On calcule}\\
a^2 &= 30,49 - 28,8\cos(82°) && \text{Valeur approchée}\\
a^2 &\approx 26,481814692 && \text{On résout (une longueur est positive)}\\
a &\approx 5,146048454
\end{aligned}$$

En arrondissant à 0,1 près, $\boxed{BD \approx 5,1}$.

2. Pour calculer $\widehat{ABD} = \beta$, on peut utiliser la loi des sinus ou le théorème d'al-Kashi.

- Avec al-Kashi :

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) && \text{On remplace par ce qu'on connaît}\\
4,5^2 &\approx 5,1^2 + 3,2^2 - 2 \times 5,1 \times 3,2\cos(\beta) && \text{On calcule}\\
20,25 &\approx 36,25 - 32,64\cos(\beta) && -36,25\\
-16 &\approx -32,64\cos(\beta) && \div -32,64\\
0,490196078 &\approx \cos(\beta) && arccos\\
60,646529945 &\approx \beta
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\widehat{ABD} \approx 61°}$.

- Avec la loi des sinus :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\beta)}{AD} &= \frac{\sin(\alpha)}{BD} && \text{On remplace par ce qu'on connaît}\\
\frac{\sin(\beta)}{4,5} &= \frac{\sin(82°)}{5,1} && \times 4,5\\
\sin(\beta) &= \frac{4,5\sin(82°)}{5,1} && \text{Valeur approchée}\\
\sin(\beta) &\approx 0,873765943 && arcsin\\
\beta &\approx 60,899260151° \text{ ou } 119,100739849°
\end{aligned}$$

On voit qu'on obtient bien la même valeur approchée qu'avec al-Kashi, mais que les décimales sont différentes. Effectivement, la valeur approchée $5,1$ n'a pas été utilisée de la même manière dans les calculs suivants, du coup les erreurs se sont propagées différemment. Impossible de savoir, à ce stade, quelle méthode donne "la valeur la plus proche" de l'angle.

• Pour obtenir la valeur la "plus exacte possible" on va utiliser la valeur exacte de BD :

$$\frac{\sin(\beta)}{AD} = \frac{\sin(\alpha)}{BD}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{\sin(\beta)}{4,5} = \frac{\sin(82°)}{\sqrt{30,49 - 28,8\cos(82°)}}$$

$\times 4,5$

$$\sin(\beta) = \frac{4,5\sin(82°)}{\sqrt{30,49 - 28,8\cos(82°)}}$$

Valeur approchée

$$\sin(\beta) \approx 0,865947212$$

arcsin

$$\beta \approx 59,991041043° \text{ ou } 120,008958957°$$

(ce n'est pas le même arrondi, on trouve 60 au lieu de 61 !)

3. On nous demande l'angle $\widehat{C}$ qui est dans le triangle BCD. Dans ce triangle, on connaît maintenant $BD \approx 5,1$, $CD = 5,7$ et on peut déduire $\widehat{DBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABD} \approx 134° - 61° \approx 73°$. On peut donc résoudre ce triangle. Vu ce qu'on connaît, on va utiliser la loi des sinus :

$$\frac{\sin(\widehat{DBC})}{DC} = \frac{\sin(\widehat{C})}{BD}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{\sin(73°)}{5,7} \approx \frac{\sin(\widehat{C})}{5,1}$$

$\times 5,1$

$$\frac{5,1\sin(73°)}{5,7} \approx \sin(\widehat{C})$$

Valeur approchée

$$0,855641097 \approx \sin(\widehat{C})$$

arcsin

$$\widehat{C} \approx 58,830632791° \text{ ou } 121,169367209°$$

Comme $\widehat{DBC} \approx 73°$, et que la somme des angles fait 180°, la seule valeur possible est donc $\boxed{\widehat{C} \approx 59°}$.

• Pour obtenir la valeur la "plus exacte possible" on va utiliser cette fois des valeurs approchées, mais avec le plus de décimales possibles :

$\widehat{DBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABD} \approx 134° - 59,991041043° \approx 74,008958957°$

$$\frac{\sin(\widehat{DBC})}{DC} = \frac{\sin(\widehat{C})}{BD}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{\sin(74,008958957°)}{5,7} \approx \frac{\sin(\widehat{C})}{5,146048454}$$

$\times 5,146048454$

$$\frac{5,146048454\sin(74,008958957°)}{5,7} \approx \sin(\widehat{C})$$

Valeur approchée

$$0,867880877 \approx \sin(\widehat{C})$$

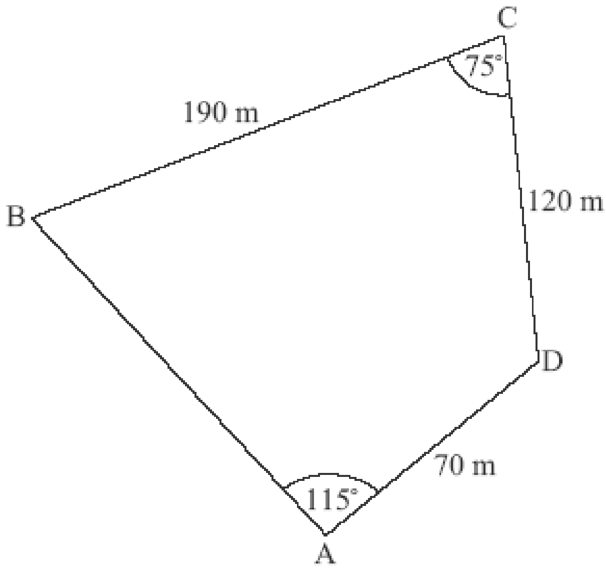
arcsin

$$\widehat{C} \approx 60,213309755° \text{ ou } 119,786690245°$$

Là encore, le résultat final ne donne pas la même chose en arrondissant au degré (60 au lieu de 59).

4. Toujours avec les notations de la figure de droite, $\mathcal{A}(ABD) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \times 4,5 \times 3,2 \times \sin(82°) \approx \boxed{7,13 \text{ u.a.}}$

Cette fois le calcul est bien le meilleur possible, puisqu'on a utilisé les valeurs exactes données par l'énoncé.



Exercice 2 : Examen harmonisé 2014.

On considère le quadrilatère $ABCD$ ci-contre :

$BC = 190$ m, $CD = 120$ m, $AD = 70$ m, $\widehat{BAD} = 115$ et $\widehat{BCD} = 75$

1. Pour calculer BD, on se place dans le triangle BCD et on utilise la relation d'al-Kashi :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \times BC \times CD \cos(\widehat{C})$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$BD^2 = 190^2 + 120^2 - 2 \times 190 \times 120 \cos(75°)$$

On calcule

$$BD^2 = 50\ 500 - 45\ 600 \cos(75°)$$

Valeur approchée

$$BD^2 \approx 38\ 697,851543325$$

On résout (une longueur est positive)

$$BD \approx 196,717695044$$

En arrondissant à 1 m près, $\boxed{BD \approx 197 \text{ m}}$.

2. On nous demande l'angle $\widehat{ABD}$ qui est dans le triangle ABD. Dans ce triangle, on connaît maintenant $BD \approx 197$, $AD = 70$ et $\widehat{A} = 115°$. On peut donc résoudre ce triangle. Vu ce qu'on connaît, on va utiliser la loi des sinus :

$$\frac{\sin(\widehat{ABD})}{AD} = \frac{\sin(\widehat{A})}{BD}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{\sin(\widehat{ABD})}{70} \approx \frac{\sin(115°)}{197}$$

$\times 70$

$$\sin(\widehat{ABD}) \approx \frac{70 \sin(115°)}{197}$$

Valeur approchée

$$\sin(\widehat{ABD}) \approx 0,3220383$$

arcsin

$$\widehat{ABD} \approx 18,786237504° \text{ ou } 161,213762496°$$

Comme $\widehat{DAB} = 115°$, et que la somme des angles fait 180°, la seule valeur possible est donc $\boxed{\widehat{ABD} \approx 19°}$.

- Pour obtenir la valeur la "plus exacte possible" on va utiliser la valeur exacte de BD :

$$\frac{\sin(\widehat{ABD})}{AD} = \frac{\sin(\widehat{A})}{BD}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{\sin(\widehat{ABD})}{70} = \frac{\sin(115°)}{\sqrt{50\ 500 - 45\ 600 \cos(75°)}}$$

$\times 70$

$$\sin(\widehat{ABD}) = \frac{70 \sin(115°)}{\sqrt{50\ 500 - 45\ 600 \cos(75°)}}$$

Valeur approchée

$$\sin(\widehat{ABD}) \approx 0,32250045$$

arcsin

$$\widehat{ABD} \approx 18,814209066° \text{ ou } 161,185790934°$$

(c'est le même arrondi, mais on va voir que pour la suite c'est important quand même d'avoir une meilleur valeur approchée !)

3. Pour calculer l'aire, il faut deux longueurs et l'angle entre les deux côtés. Le plus simple ici est de calculer $\widehat{ADB} \approx 180° - 115° - 19° \approx 46°$, d'où $\mathcal{A}(ABD) = \frac{1}{2} AD \times BD \times \sin(\widehat{ADB}) \approx \frac{1}{2} \times 70 \times 197 \times \sin(46°) \approx$ $\boxed{4\ 960 \text{ m}^2}$

• Pour obtenir la valeur la “plus exacte possible” on va utiliser cette fois des valeurs approchées, mais avec le plus de décimales possibles :

On calcule $\widehat{ADB} \approx 180° - 115° - 18,814209066° \approx 46,185790934°$ et on en déduit $\mathcal{A}(ABD) = \dfrac{1}{2}AD \times BD \times \sin(\widehat{ADB}) \approx \dfrac{1}{2} \times 70 \times 196,717695044 \times \sin(46,185790934°) \approx \boxed{4\ 968 \text{ m}^2}$

(8 m^2 de différence tout de même sur l'aire !)

4. Pour calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$, il suffit de remarquer que c'est la somme des aires des triangles ABD et BCD. On a déjà calculé l'aire de ABD, on va calculer l'autre :

$$\mathcal{A}(BCD) = \frac{1}{2}CB \times CD \times \sin(\widehat{BCD}) = \frac{1}{2} \times 190 \times 120 \times \sin(75°) \approx 11\ 012 \text{ m}^2.$$

Du coup en ajoutant les deux, $4\ 960 \text{ m}^2 + 11\ 012 \text{ m}^2 = \boxed{15\ 972 \text{ m}^2}$.

Remarquons déjà que, au lieu d'ajouter les deux valeurs approchées au mètre carré des aires des deux triangles, on ajoute les valeurs données par la calculatrice, on n'obtenait pas la même chose. Effectivement $\dfrac{1}{2} \times 70 \times 197 \times \sin(46°) \approx 4959,847923335$ et $\dfrac{1}{2} \times 190 \times 120 \times \sin(75°) \approx 11\ 011,554419695$ et la somme donne donc $15971,40234303$ dont la valeur approchée est 15 971 et pas 15 972. Bien sûr, en utilisant les valeurs les plus précises possibles, c'est encore pire : $4\ 968,223325494 + 11\ 011,554419695 \approx 15\ 980$ (ce qui est, cette fois, la valeur avec l'arrondi correct au mètre carré près).

Retenons, c'est vraiment important surtout si vous faites de la physique à assez haut niveau et que vous avez besoin de valeurs approchées précises, qu'une valeur approchée à 1 mètre carré près plus une valeur approchée à 1 mètre carré près, ça ne donne pas une valeur approchée à 1 mètre carré près. Rien que pour une addition, ça coince. Voici une petite démonstration :

Soient x et y deux nombres dont on connaît des valeurs approchées à l'unité m et n. Cela veut dire que :

$$m - 1 \leq x \leq m + 1 \qquad n - 1 \leq y \leq n + 1$$

Si on ajoute membre à membre ces deux inégalités, il vient donc que :

$$m - 1 + n - 1 \leq x + y \leq m + 1 + n + 1$$

C'est-à-dire que $m+n-2 \leq x+y \leq m+n+2$. En d'autres termes, si on ajoute les deux valeurs approchées, on n'obtient plus une valeur approchée à une unité près mais à deux unités près ! La propagation d'erreurs, en toute généralité, peut être bien plus complexe (comme on l'a vu sur l'exemple du calcul d'angle dans l'exercice 1 où, selon la méthode choisie, la propagation des erreurs était différente).

Exercice 3 : Examen harmonisé 2017.

Correction en classe.

⚠ J'attire votre attention sur le fait que le dessin qui était donné dans l'énoncé n'est pas un dessin en deux dimensions, mais un dessin en perspective d'une situation en trois dimensions !