Exercice 1 : Examen harmonisé 2018.

1. Pour calculer $\widehat{CDB}$, on se place dans le triangle BCD (on peut résoudre ce triangle car on y connaît 3 données indépendantes). On connaît une longueur et l'angle opposé, ainsi que la longueur opposée à l'angle qu'on cherche, on peut donc directement utiliser la loi des sinus :

$$\frac{\sin(\widehat{CDB})}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{f}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{\sin(\widehat{CDB})}{85,8} = \frac{\sin(55,2°)}{214}$$

$\times 85,8$

$$\sin(\widehat{CDB}) = \frac{85,8\sin(55,2°)}{214}$$

Valeur approchée

$$\sin(\widehat{CDB}) \approx 0,329227113$$

arcsin

$$\widehat{CDB} \approx 19,221871109° \text{ ou } 160,778128891°$$

Comme $\gamma = 55,2°$, et que la somme des angles fait 180°, la seule valeur possible est donc $\boxed{\widehat{CDB} \approx 19,2°}$ (l'énoncé ne précisait pas comment arrondir, du coup je choisis d'arrondir à la même précision que les données de l'énoncé).

2. Pour calculer c, il va nous falloir dans tous les cas (qu'on utilise la loi des sinus ou le théorème d'al-Kashi) la mesure de $\widehat{CBD}$, du coup on commence par calculer $\widehat{CBD} = 180° - \gamma - \widehat{CDB} \approx 180° - 55,2° - 19,2° \approx 105,6°$ (si on garde la précision maximale de la calculatrice on trouve $105,578128891°$).

La loi des sinus permet de faire moins de calculs :

$$\frac{c}{\sin(\widehat{CBD})} = \frac{f}{\sin(\gamma)}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{c}{\sin(105,6°)} \approx \frac{214}{\sin(55,2°)}$$

$\times \sin(105,6°)$

$$c \approx \frac{214\sin(105,6°)}{\sin(55,2°)}$$

Valeur approchée

$$c \approx 251,036887929$$

Ainsi $\boxed{c \approx 251 \text{ m}}$ (idem, on arrondit au dixième de mètre comme les valeurs données par l'énoncé).

3. Pour calculer $\widehat{BDA}$, on se place dans le triangle ABD (on peut résoudre ce triangle car on y connaît 3 données indépendantes). On connaît une longueur et l'angle opposé, ainsi que la longueur opposée à l'angle qu'on cherche, on peut donc directement utiliser la loi des sinus :

$$\frac{\sin(\widehat{BDA})}{a} = \frac{\sin(\alpha)}{f}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{\sin(\widehat{BDA})}{128,5} = \frac{\sin(86,4°)}{214}$$

$\times 128,5$

$$\sin(\widehat{BDA}) = \frac{128,5\sin(86,4°)}{214}$$

Valeur approchée

$$\sin(\widehat{BDA}) \approx 0,599282405$$

arcsin

$$\widehat{BDA} \approx 36,818520936° \text{ ou } 143,181479064°$$

Comme $\alpha = 86,4°$, et que la somme des angles fait 180°, la seule valeur possible est donc $\boxed{\widehat{BDA} \approx 36,8°}$.

4. Pour calculer d, il va nous falloir dans tous les cas (qu'on utilise la loi des sinus ou le théorème d'al-Kashi) la mesure de $\widehat{ABD}$, du coup on commence par calculer $\widehat{ABD} = 180° - \alpha - \widehat{BDA} \approx 180° - 86,4° - 36,8° \approx 56,8°$ (si on garde la précision maximale de la calculatrice on trouve $56,781479064°$).

La loi des sinus permet de faire moins de calculs :

$$\frac{d}{\sin(\widehat{ABD})} = \frac{f}{\sin(\alpha)}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$$\frac{d}{\sin(56,8°)} \approx \frac{214}{\sin(86,4°)}$$

$\times \sin(56,8°)$

$$d \approx \frac{214\sin(56,8°)}{\sin(86,4°)}$$

Valeur approchée

$$d \approx 179,383648265$$

Ainsi $\boxed{d \approx 179,4 \text{ m}}$.

5. On a tous les côtés, il n'y a plus qu'à ajouter : le périmètre vaut, en mètres, $a+b+c+d \approx 128,5+85,8+251+179,4 \approx \boxed{644,7}$.
6. Pour calculer l'aire du triangle, on applique la formule de l'aire par exemple utilisant l'angle α. La formule donne, en mètres carrés :

   $\mathcal{A}(ABD) = \dfrac{1}{2}ad\sin(\alpha) \approx \boxed{11\ 503}$.

Exercice 2 : La pyramide du Louvre.

Tout d'abord, vous pouvez retrouver la construction géométrique décrite dans la question bonus dans le fichier Geogebra suivant :

`http://www.barsamian.am/2020-2021/S5P6/TG14_Pyramide_Louvre.ggb`

1. La base de la pyramide est carrée, donc l'aire vaut, en mètres carrés :

   $\mathcal{A}(ABCD) = 35,45^2 = \boxed{1\ 256,7025}$.
2. L'énoncé nous dit que la hauteur de la pyramide vaut $SH = 21,64$ m, et comme H est le centre du carré $ABCD$, on calcule $HM = \dfrac{35,45 \text{ m}}{2} = 17,725$ m.

   On a maintenant suffisamment de données pour appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle SHM rectangle en H :

   $SM^2 = SH^2 + HM^2 = 21,64^2 + 17,725^2 = 782,465225$

   D'où, en mètres, $SM = \sqrt{782,465225} \approx \boxed{27,97}$.
3. Les faces latérales de cette pyramide sont des triangles tous similaires car la pyramide est régulière. On calcule donc par exemple l'aire de SBC, en mètres carrés :

   $\mathcal{A}(SBC) = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{BC \times SM}{2} \approx \dfrac{35,45 \times 27,97}{2} \approx \boxed{495,8}$.

BONUS Puisque le carré a un périmètre de 100 m, son côté vaut 25 m. Prenons par exemple le côté de ce carré qui est sur la face SBC. Notons E et F les extrémités de ce côté sur les arêtes SB et SC ainsi que I l'intersection de (EF) avec (SM). On peut donc appliquer le théorème de Thalès dans le triangle SBC (dans lequel est emboîté le triangle SEF) : $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{SI}{SM}$.

Si on appelle maintenant J l'intersection du plan dans lequel se trouve ce carré avec la hauteur (SH), on peut réappliquer le théorème de Thalès dans le triangle SHM, il vient que $\dfrac{SJ}{SH} = \dfrac{SI}{SM}$.

Du coup en mettant ces deux égalités ensemble, il vient que : $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{SJ}{SH}$.

On peut maintenant remplacer par les valeurs connues : $\dfrac{25}{35,45} = \dfrac{SJ}{21,64}$, d'où $SJ \approx 15,3$. Ainsi la hauteur de ce carré est $HJ = 21,64 - SJ \approx \boxed{6,4}$.