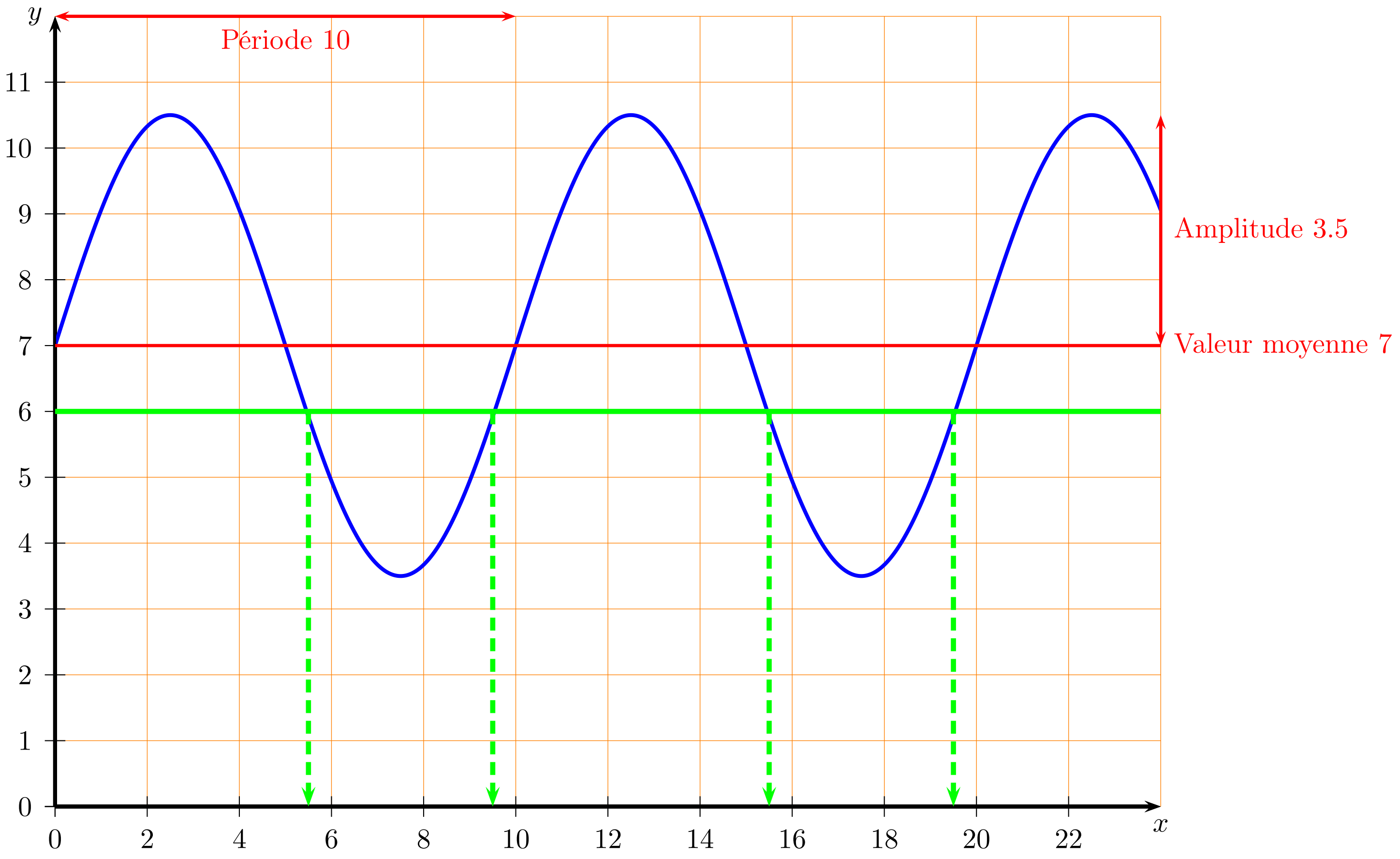
Exercice 1 — Fonctions périodiques **13 points**

On souhaite modéliser la profondeur de l'eau dans un fleuve par une fonction sinusoïdale. Dans le graphique suivant, on a tracé une fonction f qui donne, tout au long d'une journée, la profondeur de l'eau. Le temps t est mesuré en heures, et la profondeur $f(t)$ en mètres.



4 points	1. Pour naviguer avec un bateau sur ce fleuve, il faut au moins 6 m de profondeur. Quand peut-on naviguer, lors de cette journée ?
	2. Lire graphiquement :
2 points	(a) la période de f ;
2 points	(b) l'amplitude de f ;
2 points	(c) la valeur moyenne de f.
3 points	3. En déduire une écriture de $f(t)$ sous la forme $a\sin(bt) + d$.

1. On a tracé graphiquement les traits de construction. Ainsi, on peut naviguer à trois moments de la journée : $\boxed{\text{de minuit à 5h30, de 9h30 à 15h30, et de 19h30 à minuit}}$.
2. On a montré graphiquement ce qui permet de conclure.
   (a) La période de f est $\boxed{10}$.
   (b) L'amplitude de f est $\boxed{3,5}$.
   (c) La valeur moyenne de f est $\boxed{7}$.
3. On en déduit l'écriture $\boxed{f(t) = 3,5\sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right) + 7}$.

Exercice 2 — Étude de fonction **11 points**

	Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 8x - 12$.
4 points	1. Déterminer $f'(x)$.
	2. Déduire de la question 1 :
4 points	(a) l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 ;
3 points	(b) les points de la courbe de f en lesquels la tangente est horizontale.

1. On calcule la dérivée comme habituellement :

$f(x) = 2 \times x^2 + 8 \times x - 12.$

$f'(x) = 2 \times 2x + 8 \times 1 - 0.$

$\boxed{f'(x) = 4x + 8}$.

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et dériver la fonction de référence.

3 : Simplifier.

2. (a) Pour l'équation de la tangente, on utilise la formule $\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$. Ici, $a = 1$. Du coup $f'(1) = 4 \times 1 + 8 = 12$ et $f(1) = 2 \times 1^2 + 8 \times 1 - 12 = 2 + 8 - 12 = -2$. L'équation est donc $\boxed{y = 12(x - 1) - 2}$ (et, si on veut simplifier, cela donne $y = 12(x - 1) - 2 = 12x - 12 - 2 = 12x - 14$ donc $\boxed{y = 12x - 14}$).

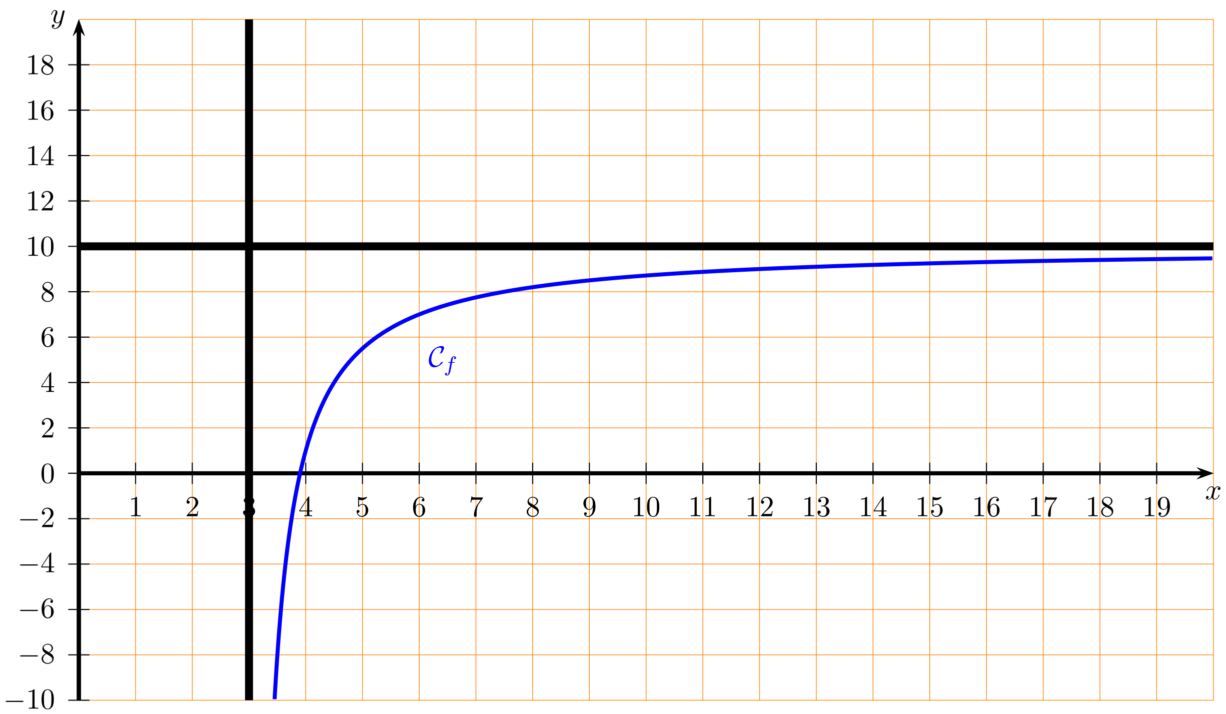
   (b) La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$. On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x + 8 &= 0 && \text{On remplace par l'expression de } f'(x) \\ 4x &= -8 && -8 \\ x &= -2 && \div 4 \end{aligned}$$

   On a donc une seule solution, et le point qui correspond est le point de la courbe de f à l'abscisse -2. Ses coordonnées sont $(-2; f(-2))$, avec $f(-2) = 2 \times (-2)^2 + 8 \times (-2) - 12 = 8 - 16 - 12 = -20$, donc c'est le point $\boxed{(-2; -20)}$.

Exercice 3 — Asymptotes **7 points**

On donne ci-dessous en bleu la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $]3; +\infty[$, et croissante sur cet intervalle. On a tracé avec un trait épais les deux asymptotes à $\mathcal{C}_f$.



4 points	1. Donner les équations des deux asymptotes à $\mathcal{C}_f$.
3 points	2. Combien vaut $\lim_{x \to +\infty} f(x)$? Expliquer à quoi correspond cette valeur.

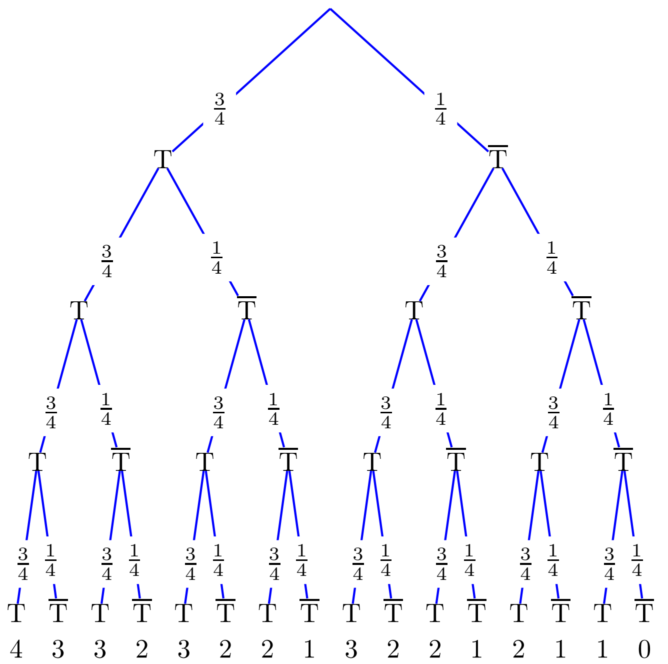
1. On lit une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y = 10}$ et une équation verticale d'équation $\boxed{x = 3}$.

2. L'asymptote horizontale nous indique que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 10}$. C'est donc la valeur vers laquelle se rapproche $f(x)$ de plus en plus, quand x augmente. Puisque f est croissante, c'est aussi presque une « valeur maximale » de f (c'est un petit abus de langage, mais on voit bien sur le graphique que c'est la valeur que f ne va jamais dépasser, tout en s'en rapprochant).

Exercice 4 — Probabilités **9 points**

	Un tireur à l'arc a une probabilité de $\frac{1}{4}$ de rater sa cible à chaque fois qu'il la vise, de manière indépendante à ses autres tirs. Il tire quatre fois de suite sur sa cible.
	Pour les questions suivantes, les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible. Tout calcul intermédiaire sera valorisé.
3 points	1. Quelle est la probabilité de toucher la cible 4 fois ?
4 points	2. Quelle est la probabilité de toucher la cible au plus 1 fois ?
2 points	3. Quelle est la probabilité de toucher la cible 5 fois ?

Ici, on peut dire qu'on reconnaît une situation de loi binomiale : on a la répétition de 4 événements identiques et indépendants. Si on note X la variable aléatoire « nombre de fois où la cible est touchée », les paramètres sont donc $n = 4$ et $p = \frac{3}{4}$. On nous demande ici $P(X = 4)$, $P(X \leq 1)$ qu'on peut donc calculer comme $P(X = 0) + P(X = 1)$ et $P(X = 5)$. On peut soit faire un arbre rapidement (sur l'arbre ci-contre on note T = « toucher la cible »), soit utiliser la formule du formulaire $P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.



1. $P(X = 4) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \boxed{\frac{81}{256}}$.
2. $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{256} + \frac{12}{256} = \boxed{\frac{13}{256}}$.
3. $P(X = 5) = \boxed{0}$ (il est impossible de toucher la cible 5 fois en la visant 4 fois).

Exercice 5 — Problème **16 points**

	Une entreprise vend un certain type de machines. On donne la fonction C définie pour $x \in [0;15]$ par : $$C(x) = x^2 + 5x + 12$$ qui représente le coût, en milliers d'euros, de la production de x milliers de machines.
	Chaque machine fabriquée est vendue au prix unitaire de 16 000€, donc on donne la fonction R définie pour $x \in [0;15]$ par : $$R(x) = 16x$$ qui représente la recette, en milliers d'euros, pour la vente de x milliers de machines.
2 points	1. Calculez $C(1)$; qu'est-ce que cela représente, dans le contexte du problème ?
2 points	2. Pour combien de machines produites le coût de production est-il de 18 000€ ?
2 points	3. Pour combien de machines vendues les recettes sont-elles de 32 000€ ?
	4. Soit $B(x)$ le bénéfice (les recettes moins les coûts) réalisé pour x milliers de machines produites et vendues.
2 points	(a) Montrer que l'on a : $$B(x) = -x^2 + 11x - 12$$
3 points	(b) Par la méthode de votre choix, dressez le tableau de variations de $B(x)$.
2 points	(c) En déduire la production qui permet d'atteindre le bénéfice maximal, et précisez ce bénéfice maximal.
3 points	(d) Combien de machines l'entreprise doit-elle produire et vendre pour être bénéficiaire ?

1. $C(1) = 1^2 + 5 \times 1 + 12 = 1 + 5 + 12 = \boxed{18}$ (on pouvait bien sûr le faire à la calculatrice, sauvegarder $c(x) := x^2 + 5x + 12$, puis calculer $c(1)$). Cela veut dire que le coût de production de 1 000 machines (x est exprimé en milliers de machines) est de 18 000€ ($c(x)$ est exprimé en milliers d'euros).
2. Pour répondre à cette question, il faut résoudre l'équation $c(x) = 18$. Lorsque l'on demande solve$(c(x) = 18, x)$, la calculatrice répond $x = -6$ or $x = 1$. Comme la fonction c n'est définie que sur $[0; 15]$ (ça n'a de toute façon pas de sens un nombre de machines négatif), il s'agit donc de $x = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\text{1 000 machines}}$.
3. Pour répondre à cette question, il faut résoudre l'équation $r(x) = 32$. Lorsque l'on demande solve$(r(x) = 32, x)$, la calculatrice répond $x = 2$, c'est-à-dire $\boxed{\text{2 000 machines}}$.
4. (a) On calcule $B(x) = R(x) - C(x) = 16x - (x^2 + 5x + 12) = 16x - x^2 - 5x - 12 = -x^2 + 11x - 12$.

   (b) Méthode de S5 : la fonction B est une fonction du second degré, tournée vers le bas (le coefficient qui multiplie x^2 est -1 qui est négatif). On sait donc que la fonction B est croissante puis décroissante. Du coup, elle s'arrête de monter là où elle est maximale, on peut demander fMax$(b(x), x)$ à la calculatrice qui nous répond $x = \frac{11}{2} = 5,5$.

   Méthode de S6 : on calcule $B'(x)$ par exemple à la calculatrice $db(x) = \dfrac{d}{dx}(b(x)) = 11 - 2x$, puis les variations de B correspondent au signe de B' donc on demande là où B' est positive solve$(db(x) > 0, x)$ ce qui donne $x < \dfrac{11}{2}$.

x	0		$5,5$		15
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Var $f(x)$	-12	$\nearrow$	$18,25$	$\searrow$	-72

   (c) La production qui permet d'atteindre le bénéfice maximal est donc de $\boxed{\text{5 500 machines}}$, et ce bénéfice maximal est de $\boxed{\text{18 250€}}$.

   (d) Pour répondre à cette question, on peut résoudre l'inéquation $B(x) > 0$. La calculatrice donne, pour solve$(b(x) > 0, x)$ le résultat $1.228 < x < 9.772$, donc c'est $\boxed{\text{entre 1 228 et 9 772 machines}}$.

Exercice 6 — Un questionnaire à choix multiples **19 points**

	Un test de compétences est constitué de 30 questions à choix multiples. Pour chaque question, il y a 4 réponses possibles pour laquelle 1 seule est juste.
	Un élève répond au hasard à chaque question, de manière indépendante. On souhaite étudier X, la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses que peut obtenir cet élève au test en répondant de cette manière.
2 points	1. Justifier qu'à chaque question, l'élève a une probabilité de 25% de trouver la bonne réponse.
4 points	2. Justifier que X suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ?
	Dans la suite, on donnera les probabilités arrondies à 4 décimales.
5 points	3. Faire une phrase expliquant ce que représente l'événement $X = 10$, puis calculer $P(X = 10)$.
	4. Pour réussir le test, l'élève doit avoir au moins 18 bonnes réponses.
4 points	Quelle est la probabilité que l'élève réussisse le test ?
4 points	5. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre de bonnes réponses strictement supérieur à 10 et inférieur ou égal à 20 ?
BONUS	Pour les autres élèves, le plus petit nombre de bonnes réponses est de 9, et le plus grand nombre de bonnes réponses est de 25. Quelle est la probabilité que l'un de ces deux nombres change avec le résultat de cet élève ?

1. Il y a un choix au hasard parmi 4 possibilités. Nous sommes donc dans une situation d'équiprobabilité, ainsi la probabilité de trouver la bonne réponse est de $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas au total}} = \dfrac{1}{4} = 25\%$.

2. On a une situation de loi binomiale car on a la répétition de 30 événements identiques et indépendants. Les paramètres sont ici $n = 30$ et $p = 25\%$.
3. L'événement $X = 10$ est l'événement $\boxed{\text{« l'élève a exactement 10 bonnes réponses »}}$. À la calculatrice on va dans Menu -> Probabilités -> Distributions -> Binomiale FdR et on rentre $n = 30$, $p = 0.25$, Borne Inf. $= 10$ et Borne Sup. $= 10$, ce qui donne $\text{binomCdf}(30, 0.25, 10, 10) \approx \boxed{0,0909}$.
4. On demande ici $P(X \geq 18)$, donc on demande $\text{binomCdf}(30, 0.25, 18, 30) \approx \boxed{0,0001}$.
5. On demande ici $P(10 < X \leq 20)$, donc on demande $\text{binomCdf}(30, 0.25, 11, 20) \approx \boxed{0,1057}$.

BONUS Pour que l'un de ces deux nombres change, il faut soit que $X \leq 8$ (alors, c'est la plus petite valeur qui va changer) soit que $X \geq 26$ (alors, c'est la plus grande valeur qui va changer) donc on calcule $\text{binomCdf}(30, 0.25, 0, 8)+ \text{binomCdf}(30, 0.25, 26, 30) \approx \boxed{0,6736}$.

Exercice 7 — Étude graphique de fonction **15 points**

	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$f(x) = 0,5x^3 + 2,5x^2 - 6$$
2 points	1. Calculez $f'(x)$.
3 points	2. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
3 points	3. En déduire le tableau de variations de f.
4 points	4. Esquissez le graphique de la fonction f, pour $x \in [-5; 2]$.
3 points	5. Sur votre graphique, tracer les tangentes à la courbe qui sont des droites horizontales.
BONUS	Combien de solutions a l'équation $f(x) = 2$?

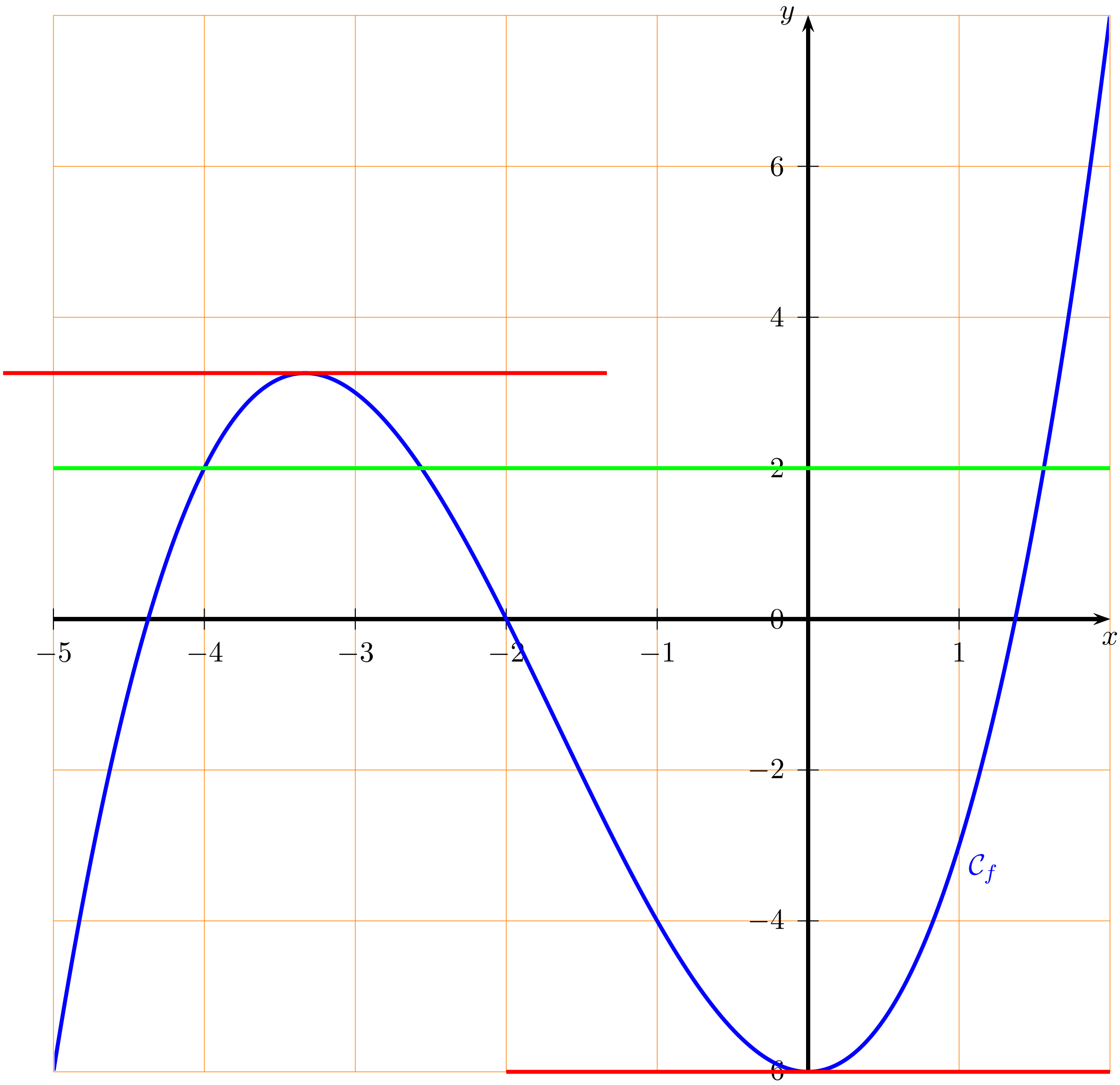
1. On calcule $f'(x)$ par exemple à la calculatrice : $f(x) := 0.5x^3+2.5x^2-6$ puis $df(x) = \dfrac{d}{dx}(b(x)) = \boxed{1.5x^2 + 5x}$.
2. On trouve le signe de f' en demandant à la calculatrice $\text{solve}(df(x) > 0, x)$ ce qui donne $x < -3.33333$ or $x > 0$.
3. On en déduit donc le tableau suivant (les valeurs en -5 et 2 servent pour la question suivante) :

x	$-\infty$	-5	-3.33333		0	2	$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Var $f(x)$	$-\infty$	-6	3.26		-6	8	$+\infty$

4. Pour tracer la courbe de f sur $[-5; 2]$, il faut qu'on démarre par choisir une échelle. De -5 à 2 ça fait 7 unités, on peut prendre par ex. 2 cm pour 1 unité sur l'axe des x.

   Sur le tableau de variations, on voit que sur cet intervalle, la valeur minimale est de -6 et la valeur maximale de 8. On peut prendre 1 cm pour 1 unité sur l'axe des y. On obtient alors le graphique (en bleu) à la page suivante.
5. Les tangentes horizontales sont aux extremums de la fonction, en $x = -3.3333$ et $x = 0$. On a tracé les tangentes (en rouge) sur le graphique.

BONUS On a tracé la droite d'équation $y = 2$ (en vert), et on voit qu'il y a 3 points d'intersection sur le graphique, donc $\boxed{\text{3 solutions}}$ (il faudrait aussi montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions ailleurs, cela se voit grâce au tableau de variations).



Exercice 8 — Dénombrement **10 points**

	Dans une classe de 30 élèves, on doit élire un groupe de représentant·e·s.
	1. Le groupe de représentant·e·s doit être composé de 4 personnes.
4 points	Combien de groupes différents peut-on former ?
	2. Le groupe de 4 personnes est maintenant élu, et il faut attribuer à chacune des 4 personnes un rôle particulier (président·e, trésorier·e, secrétaire, et adjoint·e).
4 points	Combien y a-t-il de manières d'attribuer ces 4 rôles aux 4 personnes élues ?
	3. Chacune des personnes élues peut choisir un·e suppléant·e.
2 points	Déterminer les valeurs possibles du nombre de personnes suppléantes.

1. L'ordre n'a pas d'importance : peu importe dans quel ordre on choisit les 4 personnes, si on choisit les 4 mêmes, ça formera le même groupe. Il s'agit d'un calcul de combinaison de 4 parmi 30, il y en a $C(30,4) = \dfrac{30!}{4! \cdot (30-4)!} = \dfrac{30!}{4! \cdot 26!}$ (c'est dans le formulaire). À la calculatrice : Menu -> Probabilités -> Combinaisons donne `nCr()`, il faut ensuite taper `nCr(30, 4)` ce qui donne $\boxed{27\,405}$.
2. Il y a 4 choix de rôles pour la première personne, 3 choix pour la seconde, 2 choix pour la troisième et 1 seul choix pour la quatrième. Donc au total $4 \times 3 \times 2 \times 1 = \boxed{24}$ possibilités. On pouvait aussi voir qu'il s'agissait d'une permutation, donc 4! possibilités.
3. Chaque personne élue peut choisir ou pas une personne suppléante, donc le nombre de personnes suppléantes peut être $\boxed{0, 1, 2, 3 \text{ ou } 4}$.