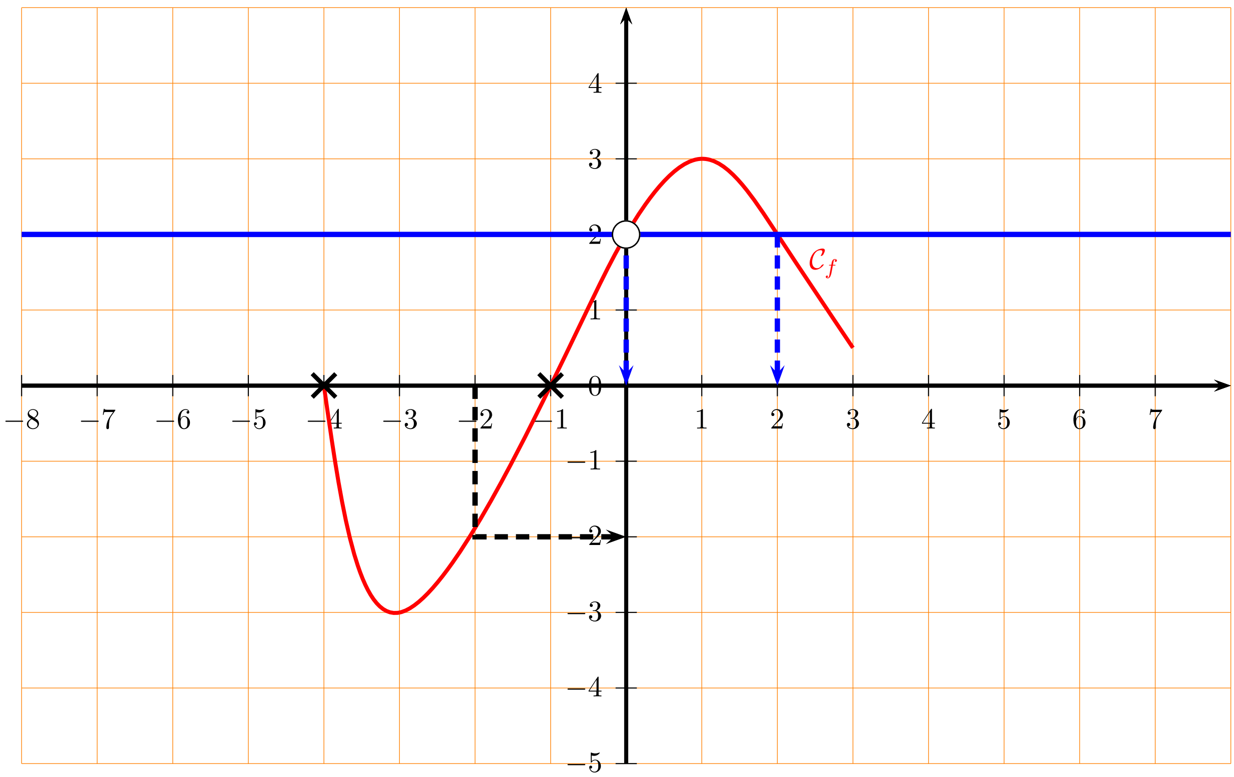
1 Partie A — Sans calculatrice

Exercice 1 — Fonctions (20 points)



1. Lire graphiquement
   (a) Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f
   (b) L'ensemble image de f
   (c) L'ensemble des racines de f
   (d) La valeur de $f(-2)$
   (e) Les x tels que $f(x) = 2$
   (f) Les coordonnées des éventuels points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe (Oy).
2. Donner
   (a) Le(s) intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction f est croissante.
   (b) Le(s) intervalle(s) sur le(s)quel(s) la fonction f est négative.
3. f possède-t-elle des extrema (minimum, maximum) ? Si oui, le(s)quel(s) ?
4. Résoudre graphiquement :
   (a) $f(x) > 0$
   (b) $f(x) < 2$

---

1. Lire graphiquement
   (a) On lit $\boxed{\mathcal{D}_f = [-4; 3]}$, car la courbe démarre à $x = -4$ et finit à $x = 3$.
   (b) L'ensemble image de f est $\boxed{[-3; 3]}$, car il y a des points sur la courbe de $y = -3$ à $y = 3$.

(c) Les racines de f se lisent comme l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (c'est là où $f(x) = 0$, voir les croix). On lit $\boxed{\mathcal{S} = \{-4; -1\}}$.

(d) On lit $\boxed{f(-2) = -2}$ (voir les traits de construction noirs pointillés).

(e) On lit $\boxed{\mathcal{S} = \{0; 2\}}$ (voir les traits de construction bleus).

(f) Il y a un point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe (Oy) (voir le point). On lit $\boxed{(0; 2)}$.

2. (a) f est croissante sur l'intervalle $\boxed{[-3; 1]}$.

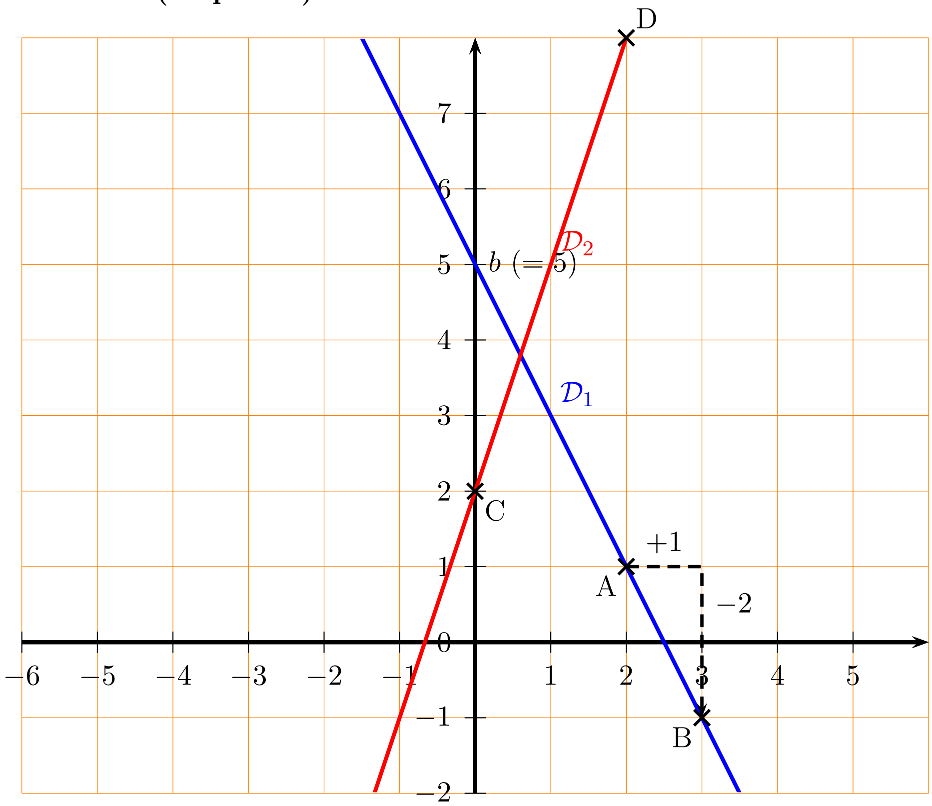
   (b) f est négative sur l'intervalle $\boxed{[-4; -1]}$.

3. f possède un minimum qui vaut $\boxed{-3}$ (atteint en $x = -3$) et un maximum qui vaut $\boxed{3}$ (atteint en $x = 1$).

4. (a) Pour résoudre $f(x) > 0$, il faut regarder où la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses. $\boxed{\mathcal{S} =]-1; 3]}$.

   (b) Pour résoudre $f(x) < 2$, il faut regarder où la courbe est en-dessous de la droite d'équation $y = 2$ (voir les traits de construction bleus déjà utilisés). $\boxed{\mathcal{S} = [-4; 0[\cup]2; 3]}$.

Exercice 2 — Droites (12 points)



1. Donner l'équation de la droite $\mathcal{D}_1$.
2. Tracer dans le même graphique la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 3x + 2$.
3. Écrire l'équation de la droite $\mathcal{D}_3$ horizontale passant par le point $(-5; -1)$.
4. On considère maintenant une droite $\mathcal{D}_4$ parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$.
   (a) Quel est son coefficient directeur ?
   (b) $\mathcal{D}_4$ passe par le point $(-1; 1)$. Quelle est son équation ?

1. Avec les points A et B sur le graphique, on lit le coefficient directeur $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{1}$ et l'ordonnée à l'origine $b = 5$ donc l'équation de la droite est $\boxed{y = -2x + 5}$.

2. Pour tracer une droite, on a besoin de deux points. On peut prendre $x = 0$, cela donne $y = 2$ (donc le point $C(0;2)$) et $x = 2$, cela donne $y = 8$ (donc le point $D(2;8)$).

3. Une droite horizontale a pour coefficient directeur $a = 0$, son équation est donc de type $y = b$. Si elle passe par le point $(-5;-1)$, on peut donc remplacer y par l'ordonnée de ce point, et on obtient $-1 = b$. L'équation de $\mathcal{D}_3$ est donc $\boxed{y = -1}$.

4. (a) Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur, c'est donc $\boxed{3}$.
   (b) L'équation de la droite $\mathcal{D}_4$ est donc de type $y = 3x + b$. Si elle passe par le point $(-1;1)$, on peut donc remplacer x et y par les coordonnées de ce point, et on obtient $1 = 3 \times (-1) + b$ donc $b = 4$. L'équation de $\mathcal{D}_4$ est donc $\boxed{y = 3x + 4}$.

Exercice 3 — Suites (8 points)

> Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $d = \dfrac{1}{2}$.
>
> 1. Calculez u_1 et u_2.
> 2. Donnez l'expression u_n en fonction de n.
> 3. En déduire u_{20}.
> 4. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n < 10$?

---

1. La suite est arithmétique donc pour passer de u_0 à u_1 on ajoute la raison $d = 0,5$. Ainsi $u_1 = u_0 + 0,5 = -1 + 0,5 = \boxed{-0,5}$. Idem, pour passer de u_1 à u_2 on ajoute la raison $d = 0,5$. Ainsi $u_2 = u_1 + 0,5 = -0,5 + 0,5 = \boxed{0}$.

2. Le formulaire nous donne, si on l'avait oubliée, la formule $u_n = u_0 + n \times d$. Ce qui nous donne, ici, $\boxed{u_n = -1 + 0,5n}$.

3. On en déduit la valeur de u_{20} en remplaçant n par 20 : $u_{20} = -1 + 0,5 \times 20 = -1 + 10 = \boxed{9}$.

4. On nous demande de résoudre $u_n < 10$.

$$\begin{array}{rcl|l}
u_n & < & 10 & \\
 & & & \text{On remplace par l'expression de } u_n \\
-1 + 0,5n & < & 10 & \\
 & & & +1 \\
0,5n & < & 11 & \\
 & & & \div 0,5 \\
n & < & 22 &
\end{array}$$

Ainsi, c'est le cas pour les valeurs de n qui sont $\boxed{\text{strictement plus petites que 22}}$, c'est-à-dire $\{0;1;2\ldots;20;21\}$.

2 Partie B — Avec calculatrice

Exercice 1 — Fréquences (12 points)

> Une entreprise enregistre le nombre d'employés qui font ou ne font pas d'heures supplémentaires. Il y a 500 salariés dans l'entreprise, dont 45% de femmes. 60% des femmes et 64% des hommes font des heures supplémentaires.
>
> 1. Complétez le tableau suivant avec les effectifs correspondants.

2. Quel est le pourcentage de femmes qui font des heures supplémentaires dans l'entreprise ?

3. Parmi les employés qui ne font pas d'heures supplémentaires, quel est le pourcentage d'hommes ?

4. Parmi les hommes, quel est le pourcentage de ceux qui ne font pas d'heures supplémentaires ?

---

1. Mise en mathématiques de l'énoncé.
   - 500 salariés;
   - 45% de femmes : $45\% \times 500 = 225$;
   - 60% des femmes font des heures supplémentaires : $60\% \times 225 = 135$;
   - 64% des hommes font des heures supplémentaires : $64\% \times (500 - 225) = 176$;
   - On remplit le reste par déduction.

Heures supplémentaires / Sexe	Oui	Non	Total
Femmes	135	90	225
Hommes	176	99	275
Total	311	189	500

2. Le pourcentage de femmes qui font des heures supplémentaires dans l'entreprise (donc, parmi tous les employés) est de $\dfrac{\text{effectif((femmes) et (heures sup'))}}{\text{effectif total}} = \dfrac{135}{500} = 0,27 = 27\%$.
3. Le pourcentage d'hommes parmi les employés sans heures supplémentaires est de : $\dfrac{\text{effectif((hommes) et (sans heures sup'))}}{\text{effectif(sans heures sup')}} = \dfrac{99}{189} \approx 0,52 = 52\%$.
4. Le pourcentage des personnes avec des heures supplémentaires parmi les hommes est de : $\dfrac{\text{effectif((heures sup') et (hommes))}}{\text{effectif(hommes)}} = \dfrac{176}{275} = 0,64 = 64\%$ (le pourcentage était également directement donné dans l'énoncé).

Exercice 2 — Fonctions (15 points)

Une entreprise produit et vend des articles. La fonction C définie par

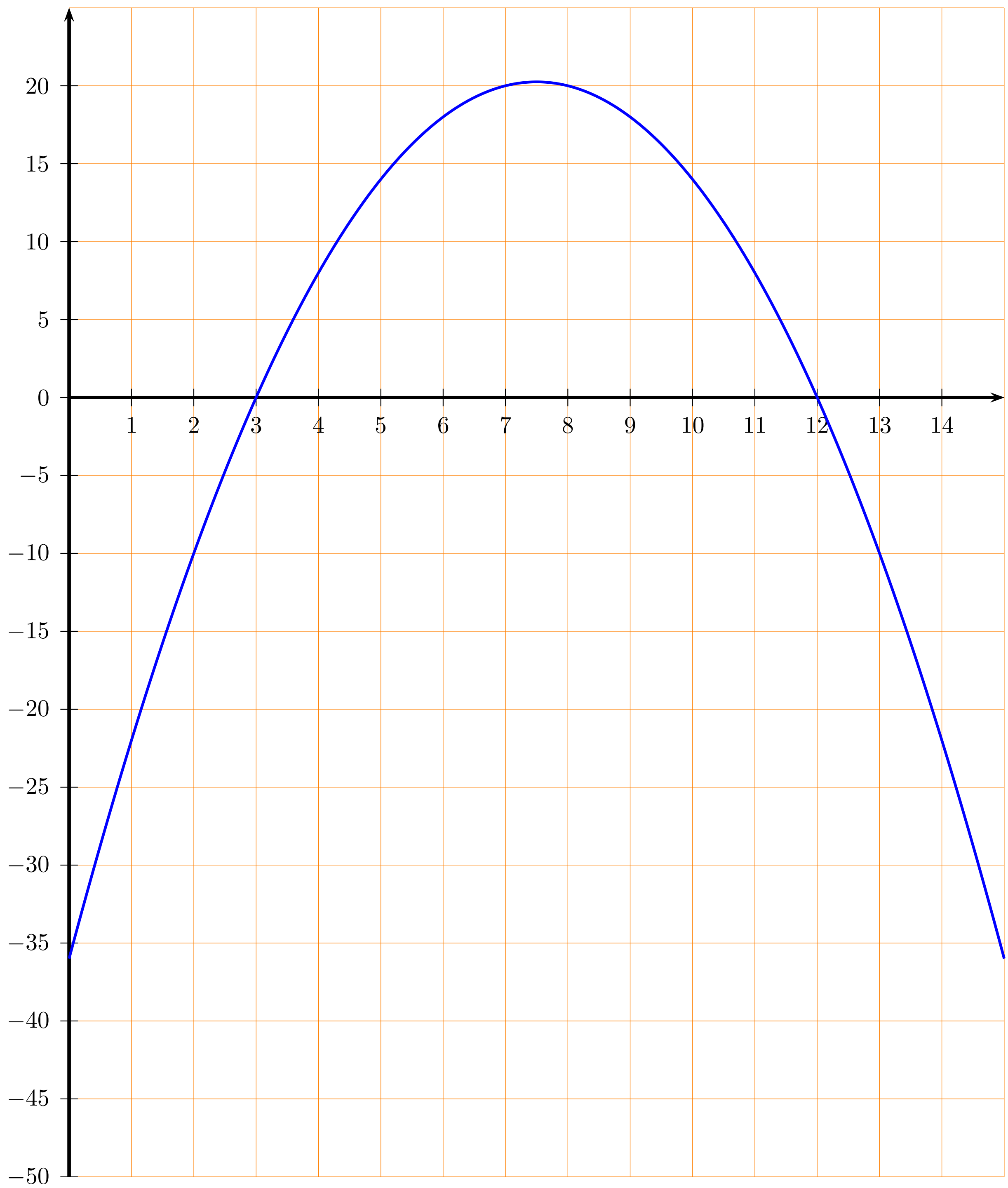
$$C(x) = x^2 + 3x + 36$$

représente le coût, en milliers d'euros, de la production de x milliers d'articles, pour $x \in [0; 15]$.

On suppose que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 18€. Soit $R(x) = 18x$ la fonction exprimant la recette en milliers d'euros pour la vente de x milliers d'articles, pour $x \in [0; 15]$.

1. Calculez les coûts de fabrication de 2 000 et 10 000 articles, puis les recettes correspondantes. Que concluez-vous ?

2. Soit $B(x)$ le bénéfice réalisé pour x milliers d'articles produits et vendus, pour $x \in [0; 15]$.
   (a) Montrer que l'on a $B(x) = -x^2 + 15x - 36$.
   (b) Tracez la représentation graphique de la fonction B dans le graphique de la page suivante.
   (c) En déduire la production qui permet d'atteindre le bénéfice maximal, et précisez ce bénéfice maximal.
   (d) Pour quelles productions l'entreprise est-elle bénéficiaire ?



1. On rentre dans la calculatrice `C(x) := x^2 + 3x + 36` puis on demande `C(2)` (ou bien on calcule $C(2) = 2^2 + 3 \times 2 + 36$). On trouve $C(2) = 46$ donc un coût de $\boxed{46\ 000€}$ pour 2 000 articles. De même pour 10 000 articles, on trouve un coût de $\boxed{166\ 000€}$.

   On fait le même principe pour les recettes : on rentre `R(x) := 18x` puis on demande `R(2)`. On trouve $R(2) = 36$ donc des recettes de $\boxed{36\ 000€}$ pour 2 000 articles. De même pour 10 000 articles, on trouve des recettes de $\boxed{180\ 000€}$.

   On conclut donc que pour 2 000 articles, l'entreprise perd de l'argent, mais est bénéficiaire pour 10 000 articles.

2. (a) On doit calculer $B(x) = R(x) - C(x) = 18x - (x^2 + 3x + 36) = 18x - x^2 - 3x - 36 = -x^2 + 15x - 36$.

   (b) On commence par faire un tableau de valeurs (l'énoncé dit que x est entre 0 et 15, ce sont également les valeurs de début et de fin du graphique) avant de tracer :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$B(x)$	-36	-22	-10	0	8	14	18	20	20	18	14	8	0	-10	-22	-36

(c) Sur le graphique on voit que le bénéfice maximal est atteint pour $x = 7,5$ ce qui correspond à une production de $\boxed{7\ 500}$ articles. On calcule $B(7,5) = 20,25$ donc ce bénéfice maximal est de $\boxed{20\ 250€}$.

(d) L'entreprise est bénéficiaire quand $B(x) \geq 0$. Graphiquement on voit que c'est pour $x \in [3; 12]$ (ce qu'on obtient également avec $solve(b(x) \geq 0, x)$). Donc, l'entreprise est bénéficiaire pour une production $\boxed{\text{entre 3 000 et 12 000 articles}}$.

Exercice 3 — Taux d'évolution (15 points)

Dans cet exercice, les taux seront arrondis au dixième de pourcent, et les autres nombres seront arrondis à l'unité.

1. Le trafic mensuel sur une autoroute était de 534 000 voitures en 2017; ce nombre était en augmentation de 15% par rapport à 2012. Quel était le trafic mensuel sur cette autoroute en 2012 ?

2. Le prix d'un article a augmenté de 5% chaque année pendant 6 ans. Quelle est l'augmentation globale sur les six années ?

3. Le prix moyen d'une voiture a augmenté de 2 % entre 2011 et 2012. Il était de 5 600€ en 2011. Quel était ce prix en 2012 ?

4. Entre 1980 et 2010, le prix moyen d'une baguette de pain a été multiplié par 2,3.

   (a) Quel a été le taux d'évolution entre 1980 et 2010 ?

   (b) Quel a été le taux d'évolution annuel moyen entre 1980 et 2010 ?

On n'aura, bien sûr, pas oublié de lire que “Les taux seront arrondis au dixième de pourcent, et les autres nombres seront arrondis à l'unité.”

1. On connait le trafic en 2017 (534 000) ainsi que le taux d'évolution entre 2012 et 2017 (+15%). Donc le coefficient multiplicateur entre les deux valeurs est de $1 + \text{taux} = 1 + 15\% = 1,15$. On peut faire le schéma suivant :

   $$\text{trafic}_{2012} \xrightarrow{\times 1,15} 534\ 000$$

   On en déduit donc $\text{prix}_{2012} = \dfrac{534\ 000}{1,15} \approx \boxed{464\ 348}$

2. En notant t le taux d'évolution global, on peut faire le schéma suivant :

   $$\begin{tikzcd}
   \text{départ} \arrow[r, bend left, "\times 1,05"] \arrow[rrrrrr, bend right, "\times(1+t)"'] & \text{année 1} \arrow[r, bend left, "\times 1,05"] & \text{année 2} \arrow[r, bend left, "\times 1,05"] & \text{année 3} \arrow[r, bend left, "\times 1,05"] & \text{année 4} \arrow[r, bend left, "\times 1,05"] & \text{année 5} \arrow[r, bend left, "\times 1,05"] & \text{année 6}
   \end{tikzcd}$$

   Ainsi $1 + t = 1,05^6 \approx 1,340095641$ donc $t \approx 0,340095641 \approx \boxed{34,0\%}$.

3. On connait le prix en 2011 (5 600€) ainsi que le taux d'évolution entre 2011 et 2012 (+2%). Donc le coefficient multiplicateur entre les deux valeurs est de $1 + \text{taux} = 1 + 2\% = 1,02$. On peut faire le schéma suivant :

   $$5\ 600€ \xrightarrow{\times 1,02} \text{prix}_{2012}$$

   On en déduit donc $\text{prix}_{2012} = 5\ 600€ \times 1,02 = \boxed{5\ 712€}$

4. (a) Si le coefficient multiplicateur est de 2,3, c'est que le taux est de 1,3, c'est-à-dire $\boxed{130\ \%}$.
   (b) Soit t le taux d'évolution annuel moyen.
   Entre 1980 et 2010, il y a eu 30 évolutions, le prix a été multipliée par $(1+t)^{30}$. D'après l'énoncé, le coefficient multiplicateur global est $2,3$.
   Donc $(1+t)^{30} = 2,3$.
   On peut taper $solve((1+t)^{30} = 2.3, t)$ ou bien on peut résoudre à la main.
   C'est équivalent à $1+t = 2,3^{\frac{1}{30}}$.
   En enlevant 1 de chaque côté, cela donne $t = 2,3^{\frac{1}{30}} - 1 \approx 0,028153$.
   Le taux d'évolution annuel moyen est environ de $\boxed{2,8\ \%}$.

Exercice 4 — Suites (18 points)

> Une entreprise a conclu un contrat d'assurance en 2014. Le coût de la première année est de 1 300€, et chaque année il augmente de 70€.
>
> On note u_n le coût annuel de l'assurance pour l'année $2014+n$.
>
> 1. Déterminez u_0, u_1, u_2.
> 2. Quelle est la nature de la suite u ? Sa raison et son terme initial ?
> 3. Donnez l'expression de u_n en fonction de n.
> 4. Quel sera le coût de l'assurance pour l'année 2020 ?
> 5. En quelle année le coût annuel de l'assurance dépassera-t-il 1 600€ ?
> 6. Calculez la facture totale du contrat d'assurance de 2014 à 2020.
> 7. En quelle année la facture totale du contrat d'assurance dépassera-t-elle 15 000€ ?

---

1. L'énoncé nous dit que $u_0 = \boxed{1\ 300}$, puis $u_1 = 1\ 300 + 70 = \boxed{1\ 370}$, puis $u_2 = 1\ 370 + 70 = \boxed{1\ 440}$.
2. La suite u est une $\boxed{\text{suite arithmétique}}$ de raison $\boxed{2}$ et de terme initial $\boxed{u_0 = 1\ 300}$.
3. Le formulaire nous donne, si on l'avait oubliée, la formule $u_n = u_0 + n \times d$. Ce qui nous donne, ici, $\boxed{u_n = 1\ 300 + 70n}$.
4. L'année 2020 correspond à $n = 6$, on calcule donc $u_6 = 1\ 300 + 70 \times 6 = 1\ 720$. Le coût de l'assurance pour l'année 2020 sera de $\boxed{1\ 720€}$.
5. On peut ici taper $u(n) = 1300 + 70 \cdot n$ puis $solve(u(n) \geq 1600, n)$ et la calculatrice nous répond (avec `ctrl` + `enter` et pas juste `enter` qui donne une fraction) que c'est vrai quand $n \geq 4,28571$. Donc, c'est vrai à partir de $n = 5$, c'est-à-dire l'année $\boxed{2019}$.
6. Il s'agit de calculer $\sum_{n=0}^{6} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$. On pouvait le calculer à l'aide du symbole $\sum$ de la calculatrice, ou bien à la main vu le peu de valeurs. On trouve 10 570, donc la facture totale du contrat d'assurance de 2014 à 2020 est de $\boxed{10\ 570€}$.
7. Ici on peut demander à la calculatrice $v(n) = \sum_{i=0}^{n} u(i)$ puis $solve(v(n) \geq 15000, n)$, la calculatrice nous dit que c'est vrai quand $n \geq 8,40853$ donc à partir de $n = 9$, c'est-à-dire l'année $\boxed{2023}$.

   On pouvait retrouver ce raisonnement par tâtonnements en ajoutant u_6, u_7, u_8 puis enfin u_9 à la facture totale, pour trouver un montant qui dépasse 15 000€.