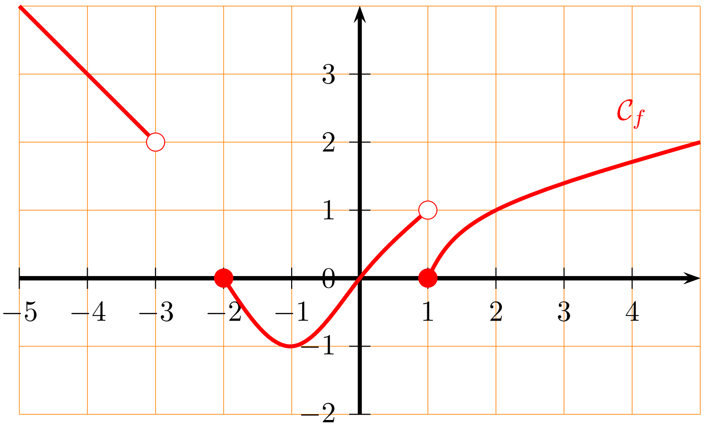
<u>Notation :</u> dans les courbes suivantes, un point rempli signifie que le point est sur la courbe ; un point vide signifie que le point n'est pas sur la courbe.

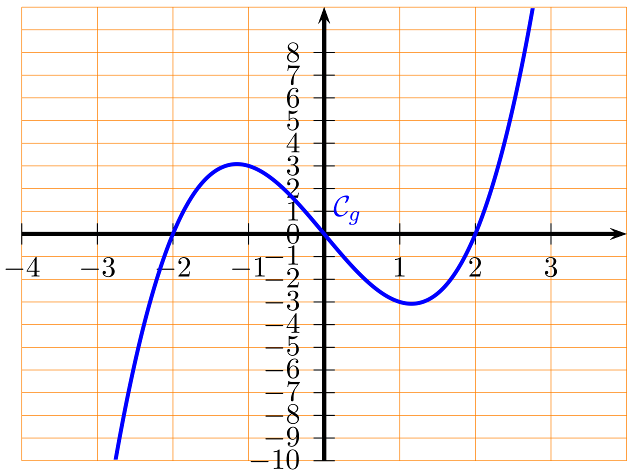
Exercice 1.

Une machine de travaux publics enfonce un pieu en béton dans le sol. Au premier coup, le pieu pénètre de 2 m dans le sol. En suite, le pieu s'enfonce de moins en moins profondément. D'un coup à l'autre, la perte est de 20%.

1. De combien de mètres s'enfonce le pieu au deuxième coup ? Quelle est alors la profondeur atteinte par le pieu ?
2. Comment déterminer la profondeur atteinte au n-ième coup ?
3. Combien de coups faut-il pour que ce pieu atteigne une profondeur de 9 mètres, 12 mètres ?

Exercice 2 — Graphiquement, déterminer les limites suivantes.





1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
5. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
6. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$
9. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

Exercice 3 — Avec la calculatrice.

1. La fonction $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+3}$ n'est pas définie en $x = -3$. Déterminer les limites de f en -3.
2. On considère maintenant la fonction $g(x) = \dfrac{x-5}{6-2x}$.
   (a) En quelle valeur cette fonction n'est pas définie ?
   (b) Déterminer les limites de g en cette valeur.
3. On considère maintenant la fonction $h(x) = \dfrac{3x}{(x-1)^2}$.
   (a) En quelle valeur cette fonction n'est pas définie ?
   (b) Déterminer les limites de h en cette valeur.

Exercice 4 — Fonctions périodiques.

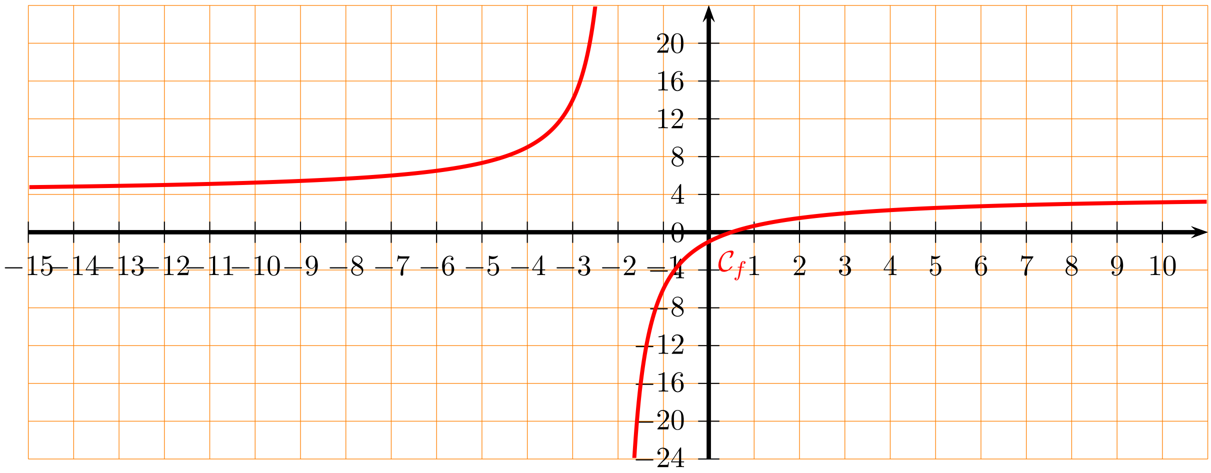
1. On considère la fonction $f(x) = \cos(x)$ qui est périodique.
   (a) Esquisser le graphique de cette fonction pour $x \in [0; 15]$.
   (b) Quelle a l'air d'être la période de cette fonction ?
   (c) Que peut-on dire de la limite de cette fonction quand x tend vers $+\infty$?
2. Mêmes questions pour la fonction $g(x) = 1,5 \times \sin(2x+3)$.
3. Existe-t-il une fonction périodique qui a une limite quand x tend vers $+\infty$?

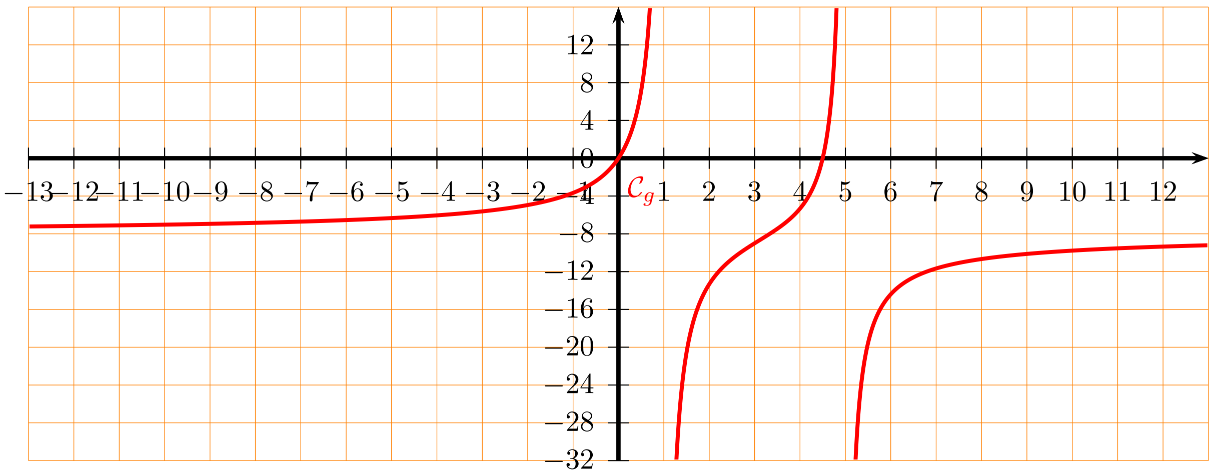
Exercice 5 — Asymptotes, graphiquement.

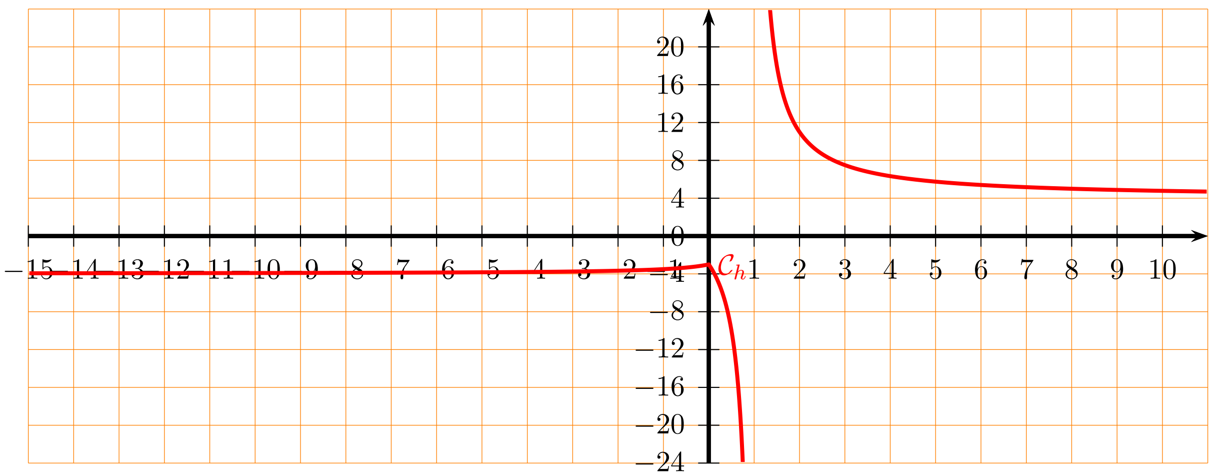
Rappel 1 : Si une fonction f admet une limite finie a en l'infini (quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$), alors c'est que la fonction est "presque horizontale" au voisinage de l'infini. On dit que sa courbe a une asymptote horizontale. Dans ce cas, l'équation de l'asymptote est $y = a$.

Rappel 2 : Si une fonction f admet une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) en un nombre fini a (quand $x \to a^+$ ou $x \to a^-$), alors c'est que la fonction est "presque verticale" au voisinage de a. On dit que sa courbe a une asymptote verticale. Dans ce cas, l'équation de l'asymptote est $x = a$.

Pour chacune des fonctions f, g et h suivantes, déterminez toutes les asymptotes à leur graphique.







Exercice 6 — Limites, à la main.

Déterminer à la main les limites suivantes, puis vérifier à l'aide de la calculatrice :

1. Pour $f(x) = x$, on demande $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
2. Même question pour les fonctions $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$ et $i(x) = x^4$.
3. Pour $f(x) = -x^4 + x^3$, on demande $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Pour $f(x) = (1 - x)(2 - x)$, on demande $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
5. Pour $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, on demande $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 7 — Asymptotes, à la calculatrice.

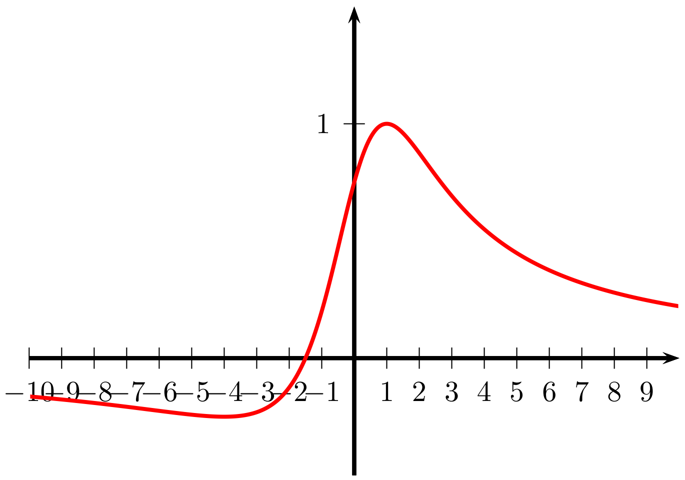
Déterminer à la calculatrice les asymptotes horizontales et verticales des fonctions suivantes :

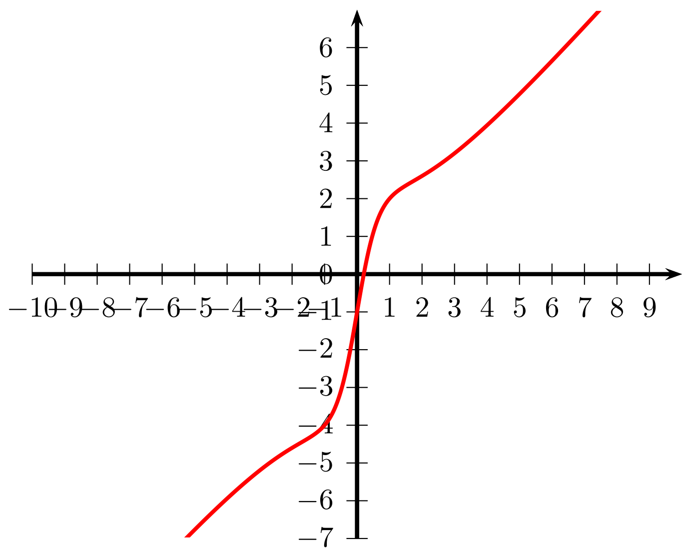
1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-5}$.
2. $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 16}$.
3. $h(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$.
4. $i(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$.

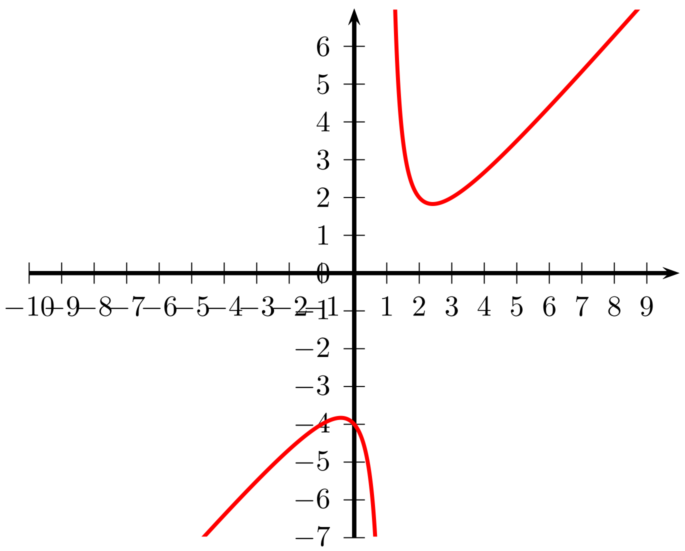
Exercice 8 — Asymptotes, à la main.

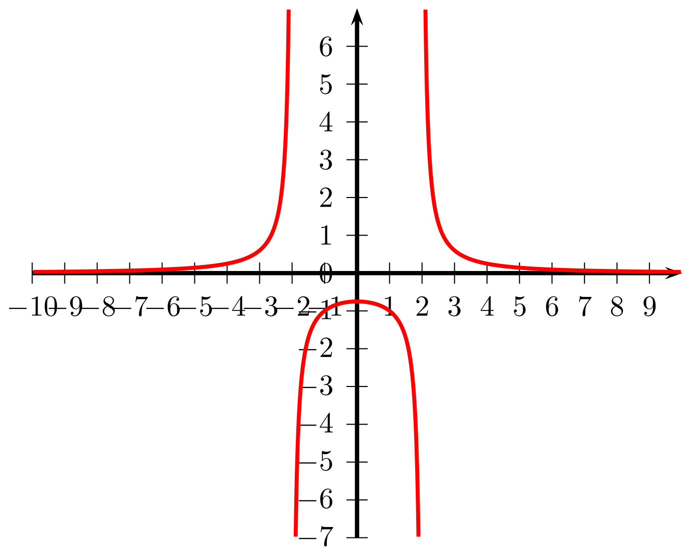
Déterminer à la main le domaine de définition et les asymptotes horizontales et verticales éventuelles des fonctions suivantes, puis associer chaque fonction à son graphique.

$f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+4}$; $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$; $h(x) = \dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$; $i(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 5x - 1}{x^2+1}$.









Exercice 9 — L'eau salée.

Une citerne de grande capacité contient 150 litres d'eau pure. On y verse de l'eau salée concentrée à 10g/l, à la vitesse de 20 litres par minute.

1. Déterminer le volume V du mélange et la quantité de sel après t minutes.
2. Quelle est la concentration $c(t)$ de sel, en g/l, après t minutes ?
3. Que devient $c(t)$ quand $t \to +\infty$?
4. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 10 — Population.

La population d'un pays évolue selon une fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{7x + 200}{x + 20}$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis la fin de l'année depuis 1960 et $f(x)$ est exprimée en millions d'habitants.

1. Déterminer les nombres k et b tels que $f(x) = \dfrac{k}{x + 20} + b$ pour $x > -20$ (feuille de calcul : `expand(f(x), x)`).
2. Esquissez la courbe de f, en mettant en valeur les deux asymptotes. (Réglage de la fenêtre : xmin=-20 ; xmax= 50 ; graduation des x :1 ; ymin = -3, ymax=20, graduation des y :1)
3. Établir si la population de ce pays est en expansion ou en régression.
4. Étudier la limite en $+\infty$, en déduire l'asymptote horizontale et donner une interprétation pour la population de ce pays.
5. Résoudre l'équation $\dfrac{7x + 200}{x + 20} = 8$.
6. En observant le graphique de la fonction f, précisez si après 2000, la population est supérieure ou inférieure à 8 millions d'habitants.

Exercice 11 — Coût de production.

Le coût moyen de production d'un alliage est donnée par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 10}{x}$ où $x > 0$ est la quantité d'alliage, exprimée en kilogrammes et $f(x)$ est le coût moyen, exprimé en milliers d'euros.

1. Écrire $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x}$ où a, b et c sont des nombres à préciser (feuille de calcul : `expand(f(x), x)`).
2. Interpréter le résultat du coût moyen lorsqu'on fabrique des quantités proches de zéro.
3. Esquissez la courbe, en mettant en valeur l'asymptote. (réglage de la fenêtre : xmin=-1 ; xmax= 12 ; graduation des x :1 ; ymin = -3, ymax=100, graduation des y :1)