Chapitre 5.
Limites

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2020–2021

Objectifs de ce chapitre

Dans ce chapitre, nous allons :

- voir une nouvelle notion : les limites
- comprendre quand une suite, ou une fonction, a une limite
- étudier plusieurs types de limites : en un nombre donné, ou bien en $\pm\infty$
- en déduire des droites particulières : les asymptotes

Pour une suite (u_n), lorsque n devient de plus en plus grand, parfois les valeurs de (u_n) se rapprochent d'une valeur.

Exemple : les valeurs de $u_n = 2 \times (0,8)^n$ (suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 0,8$) se rapprochent de 0 :

n	0	1	2	5	10
$2 \times (0,8)^n$	2	1,6	1,28	$\approx 0,66$	$\approx 0,21$

n	20	50	70	...
$2 \times (0,8)^n$	$\approx 0,023$	$\approx 0,000029$	$\approx 0,00000033$	...

On dit que la suite u a pour limite 0 (quand n tend vers $+\infty$) et on note cela $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} 2 \times (0,8)^n = 0}$.

Cf. exercice 1 de la feuille : cette fois-ci il faut calculer la somme des termes de la suite. On a toujours $u_n = 2 \times (0,8)^n$ et on veut maintenant étudier :

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

n	0	1	2	5	10
v_n	2	$3,6$	$4,88$	$\approx 7,38$	$\approx 9,14$

n	20	50	70	...
v_n	$\approx 9,91$	$\approx 9,99989$	$\approx 9,9999987$	...

La somme semble se rapprocher de 10. On note cela $\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = 10}$.

Pour une suite (u_n), lorsque n devient de plus en plus grand, parfois les valeurs de (u_n) deviennent aussi grandes que voulu.

Exemple : les valeurs de $u_n = 5+3\times n$ (suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $d = 3$) :

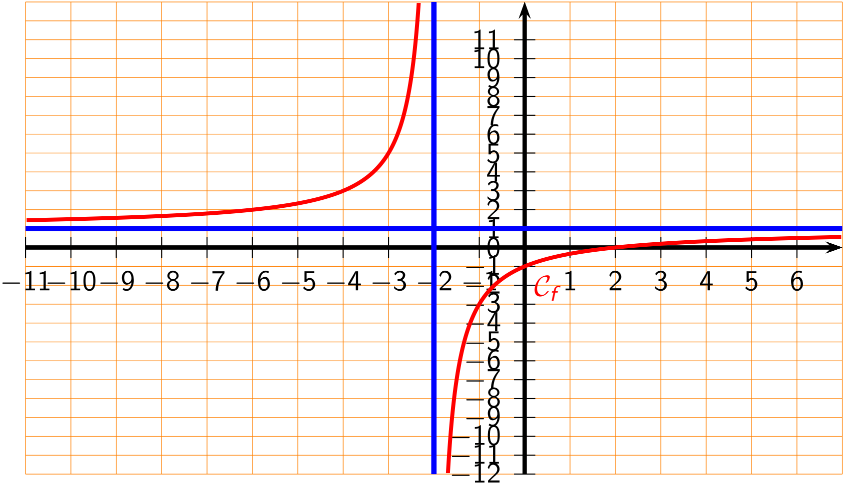
n	0	1	2	5	10	100	2000	...
$5+3\times n$	5	8	11	25	35	305	6005	...

On dit que la suite u a pour limite $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$) et on note cela $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} 5+3\times n = +\infty}$.

Remarque : si on fait la somme de ces termes, cela tend également vers $+\infty$!

Pour une fonction f, on va étudier deux cas :

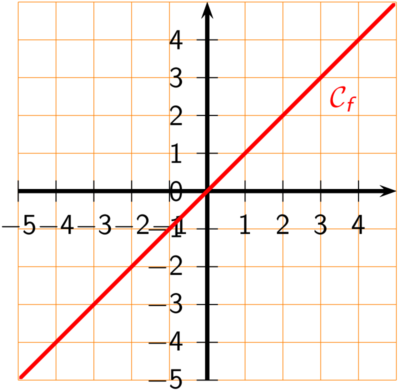
- la limite de f en l'infini (en $+\infty$ ou $-\infty$) : comme les suites
- la limite de f en une valeur finie (par exemple en -2)

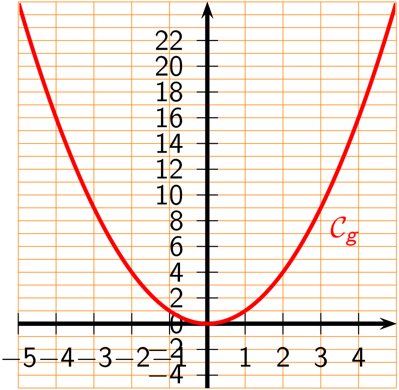


II/ Limites de fonctions

4) Limites de polynômes :

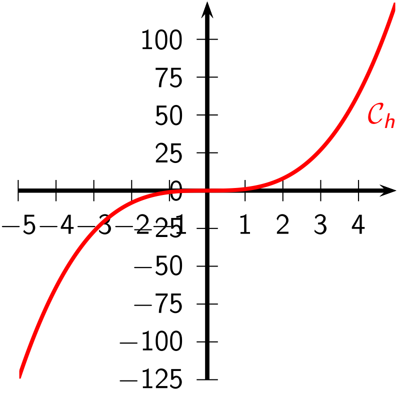
Voici les courbes des fonctions $f(x) = x$, $g(x) = x^2$:

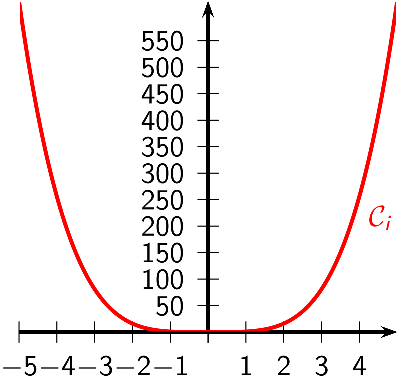




On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

Voici les courbes des fonctions $h(x) = x^3$, $i(x) = x^4$:





On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.

Et si on combine ? Quelles sont les limites de

$$f(x) = 2,1x^3 - 1,7x^2 + 7$$

en $+\infty$ et $-\infty$?