Chapitre 6.
Nombre dérivé

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

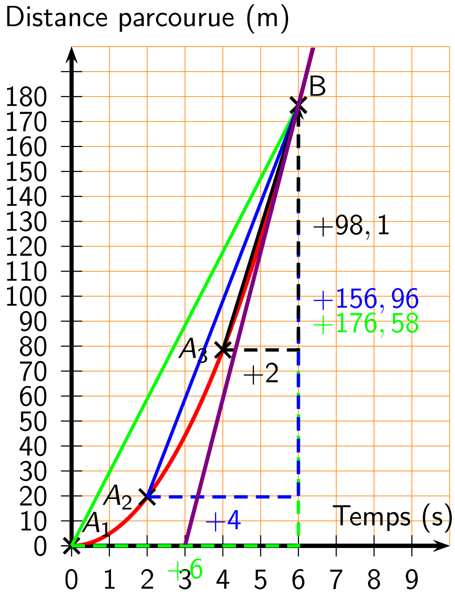
Année scolaire 2020–2021

Uccle
Schola Europaea • Bruxelles I

Objectifs de ce chapitre

Dans ce chapitre, nous allons :

- réviser plusieurs notions : les droites, les limites
- comprendre une nouvelle notion : la tangente à une courbe, le nombre dérivé
- découvrir des formules et des applications de la dérivée



Ci-contre on a $f(x) = \dfrac{9,81x^2}{2}$.

Le calcul de la vitesse moyenne se fait en regardant le coefficient directeur de la sécante. Par exemple :

- Sur $[0;6]$: $\dfrac{+176,58}{+6} \approx 29,43$
- Sur $[2;6]$: $\dfrac{+156,96}{+4} \approx 39,24$
- Sur $[4;6]$: $\dfrac{+98,1}{+2} \approx 49,05$

Quand A se rapproche de plus en plus de B, on a la tangente à la courbe au point B. La vitesse instantanée en 6 est la pente de la tangente violette.

Sur la figure précédente, on a noté $B(6; f(6))$, $A_1(0; f(0))$, $A_2(2; f(2))$ et $A_3(4; f(4))$. Donc, si on fait le calcul :

- La pente de (A_1B), c'est $\dfrac{f(6)-f(0)}{6-0} = \dfrac{176,58}{6} \approx 29,43$
- La pente de (A_2B), c'est $\dfrac{f(6)-f(2)}{6-2} = \dfrac{156,96}{4} \approx 39,24$
- La pente de (A_3B), c'est $\dfrac{f(6)-f(4)}{6-4} = \dfrac{98,1}{2} \approx 49,05$

Et donc, quand le point $A(a; f(a))$ se rapproche de B, on obtient donc que la pente de la tangente, c'est :

$$\lim_{a \to 6} \frac{f(6)-f(a)}{6-a}$$

La calculatrice donne $\approx 58,86$.

I/ La tangente à une courbe

Ce qu'on appelle <u>nombre dérivé</u> d'une fonction f en un nombre a, c'est la pente de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a (donc, au point de coordonnées $(a; f(a))$).

On note ce nombre $\boxed{f'(a)}$ (ou parfois $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$).

La calculatrice calcule les dérivées. Pour cela, on demande $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ qui se trouve avec les autres symboles comme lim, $\sum$... Par exemple avec la fonction précédente :

- $f(x) := \dfrac{9,81x^2}{2}$ (sauvegarder la fonction f)
- $df(x) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ (sauvegarder $f'(x)$ dans la fonction df)
- $df(6)$ (calculer le nombre dérivé en 6)

Si $\mathcal{C}_f$ est une droite (vrai quand f est une fonction affine), la tangente à une droite... c'est elle-même. Ainsi, le nombre dérivé, c'est juste le coefficient directeur :

Dérivée d'une fonction affine

Si $f(x) = ax + b$, alors $f'(x) = a$.

Si $f(x) = x^2$, alors :

Dérivée de $f(x) = x^2$

Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

Démonstration (hors programme) : on a vu que $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Si $f(x) = x^2$, cela donne $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \dfrac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a$. Cette quantité, quand $x \to a$, tend vers $2a$. D'où $f'(a) = 2a$.

Le formulaire (`http://www.barsamian.am/EE_docs_officiels/S6S7_Formulaire_maths.pdf`) donne la formule qu'il faut maîtriser :

Dérivée de $f(x) = x^n$ (pour $n \geq 1$)

Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

Par exemple :

- si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$
- si $f(x) = x^4$, alors $f'(x) = 4x^3$

Et on retrouve bien sûr que :

- si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$ (car $x = x^1$ et $x^{1-1} = x^0 = 1$)
- si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$

N'oublions pas que si $f(x) = c$ (une constante), alors $f'(x) = 0$ (le graphique d'une fonction constante est une droite horizontale, donc pente nulle)

Linéarité de la dérivée

Si f et g sont deux fonctions et que k est un nombre, alors :
Pour $h(x) = f(x) + g(x)$, on a $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
Pour $i(x) = k \times f(x)$, on a $i'(x) = k \times f'(x)$.

Quand on dérive une somme, il faut faire la dérivée terme par terme. Quand un terme s'écrit un nombre fois une fonction qu'on sait dériver, on garde le nombre, et on dérive la fonction.

Exemple 1 : on veut dériver $f(x) = x^4 + x^2$. On connaît la formule pour dériver x^4, ça donne $4x^3$. On connaît la formule pour dériver x^2, ça donne $2x$. Donc, la dérivée de $f(x)$, c'est la somme de ces deux dérivées : $f'(x) = 4x^3 + 2x$.

Exemple 2 : on veut dériver $g(x) = 5x^3$. On connaît la formule pour dériver x^3, ça donne $3x^2$. Donc, la dérivée de $g(x)$, c'est 5 fois cette dérivée : $g'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.

La méthode complète sur un exemple plus compliqué : nous voulons dériver $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 2.5$.

$$f(x) = x^3 - 1.5 \times x^2 - 6 \times x + 2.5.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1.5 \times 2x - 6 \times 1 + 0.$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3x - 6}.$$

Étape 1 : on écrit chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence (en S6, nos fonctions de références sont les fonctions puissance : ici x^3, x^2, x et les constantes).

Étape 2 : dans chaque terme, on garde la constante et on dérive la fonction de référence.

Étape 3 : on simplifie.

Étape 4 : on vérifie à la calculatrice. Voir diapositive suivante.

II/ Formules de calcul

La méthode complète à la calculatrice sur le même exemple : nous voulons toujours dériver $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 2.5$. Je remets les étapes, comme à la diapositive 5 :

- $f(x) := x^3 - 1.5x^2 - 6x + 2.5$ (sauvegarder la fonction f)
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ (calculer et afficher la fonction dérivée de f)

La calculatrice a bien affiché $3x^2 - 3x - 6$, comme on avait calculé.

Remarque : à la place de demander directement $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$, on peut commencer par sauvegarder le calcul, si on a besoin de le réutiliser plus tard :

- $df(x) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ (sauvegarder $f'(x)$ dans la fonction df)
- $df(x)$ (afficher la fonction df qui est la fonction dérivée de f)

1) Équation de la tangente

Pour calculer l'équation de la tangente à une courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, on a fait la méthode suivante :

- on cherche l'équation de la tangente $y = mx + p$
- la pente m de la tangente, c'est le nombre dérivé $f'(a)$
- on sait que le point $(a; f(a))$ appartient à la courbe donc on en déduit l'ordonnée à l'origine p de la tangente

Exemple : on cherche l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = -4x^2 + 6x + 1$ à l'abscisse 1. On calcule $f'(x) = -8x + 6$. Donc $f'(1) = -8 \times 1 + 6 = -2$. L'équation de la tangente, c'est donc $y = -2x + p$. Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1, c'est le point $(1; f(1))$ et $f(1) = -4 \times 1^2 + 6 \times 1 + 1 = -4 + 6 + 1 = 3$. Donc, le point $(1; 3)$ est sur la tangente, ainsi on peut écrire :
$3 = -2 \times 1 + p$ c'est-à-dire $5 = p$. L'équation de la tangente est donc $\boxed{y = -2x + 5}$.

Équation de la tangente

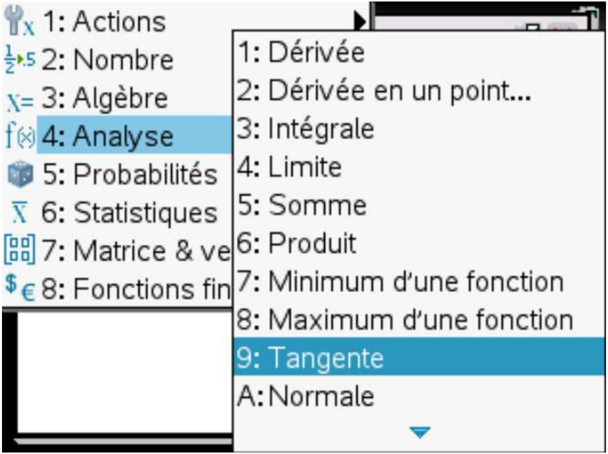
L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, c'est : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

La formule est à apprendre par cœur : elle sert chaque année au baccalauréat, et elle n'est pas dans le formulaire ! Pour démontrer ce résultat, on utilise la méthode précédente :

1. le coefficient directeur, c'est $f'(a)$
2. l'équation est donc $y = f'(a) \times x + b$
3. on trouve b en utilisant le fait que le point $(a; f(a))$ est sur la tangente donc $f(a) = f'(a) \times a + b$ ce qui donne $f(a) - f'(a) \times a = b$
4. l'équation est donc $y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a$, ce qui donne bien, en factorisant par $f'(a)$: $\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$.

Vidéo : `https://www.youtube.com/watch?v=8GUkUdAD4FA`.

À la calculatrice, pour avoir l'équation de la tangente, on tape simplement *tangentLine*$(f(x), x, a)$ (Menu -> 4 Analyse -> 9 Tangente) :



III/ Applications

2) Signe de f' et variations de f

Variations et dérivée

Soit f une fonction qui admet une dérivée sur un intervalle I.
$f'(x) \geq 0$ sur I si et seulement si f est croissante sur I.
$f'(x) \leq 0$ sur I si et seulement si f est décroissante sur I.
$f'(x) = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.

Exemple : $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 4$:

x	0		1		7		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Var $f(x)$		↗		↘		↗	

3) Recherche d'extremums

Rappel : un extremum, c'est un minimum ou un maximum.

Extremums locaux

La fonction f admet un extremum local en a si f' s'annule pour la valeur a en changeant de signe.

Remarque : cela veut dire que $f'(a) = 0$ et que le signe de f' juste avant a est différent du signe de f' juste après a.

Cela se voit sur le tableau de variations : à la diapositive précédente, on voit qu'il y a un maximum local à la fonction f en $x = 1$ (car f est croissante avant, puis décroissante après), et de même il y a un minimum local en 7 (car f est décroissante avant, puis croissante après).

Vidéo-bilan sur le chapitre

Vidéo qui récapitule la méthode globale pour la plupart des exercices sur les fonctions (par exemple l'exercice 7 de la feuille) :

`https://www.youtube.com/watch?v=7VAH9qpIB-E`

Remarque 1 : on ne s'est pas servi ensemble du "sachant que" ($|$) : ce n'est pas indispensable, mais si ça vous aide n'hésitez pas. On peut donc mettre, après le solve, un sachant que avec les valeurs minimale et maximale pour x. Dans le test 4, on aurait par exemple tapé, pour avoir le signe de la dérivée "$solve(d(x) > 0, x)|0 \leq x \leq \infty$".

Remarque 2 : à la question 2) il y a une coquille dans le texte à droite de la vidéo (4 :34), pour les fractions c'est divisé par 3 (comme le dit la voix) et pas divisé par 2 (comme c'est écrit).