# Chapitre 7.
# Probabilités

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2020–2021

# Plan du chapitre

- Rappels de S4
- Rappels de S5 : probabilités conditionnelles
- Loi binomiale

> “ *Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la loi des grands nombres. Elle consiste en ce que, si l'on observe des nombres très considérables d'événements d'une même nature, dépendant de causes constantes et de causes qui varient irrégulièrement, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, c'est-à-dire sans que leur variation soit progressive dans aucun sens déterminé, on trouvera, entre ces nombres, des rapports à très peu près constants. Pour chaque nature de choses, ces rapports auront une valeur spéciale dont ils s'écarteront de moins en moins, à mesure que la série des événements observés augmentera davantage, et qu'ils atteindraient rigoureusement s'il était possible de prolonger cette série à l'infini.*
>
> *S.D. Poisson, "Recherches sur la probabilité des jugements" (1838), Préambule (page 7)* ”

Une expérience aléatoire est composée de différentes issues (on dit aussi événements élémentaires). On note souvent $\Omega$ l'ensemble des issues, et on l'appelle univers.

Par exemple si l'expérience aléatoire consiste à lancer un dé cubique où les faces sont numérotées de 1 à 6, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Un événement est un sous-ensemble de $\Omega$.

Dans l'exemple précédent, l'événement $A =$ "obtenir un nombre pair" est l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

Remarque : les événements sont toujours rapportés à une expérience donnée, ainsi obtenir un nombre pair ici n'a que 3 issues possibles, cela serait différent dans une autre expérience aléatoire (si on jouait à la roulette, par exemple, qui contient les nombres de 0 à 36).

# I/ Notations et premières propriétés

On a les notations suivantes si $A$ et $B$ sont deux événements :

- $A \cup B$ représente l'événement <u>réunion</u> de $A$ et de $B$, c'est-à-dire qui contient les issues de $A$ avec celles de $B$.

  Un ensemble ne contient qu'au plus une seule fois un élément, donc les éléments en commun ne sont pas deux fois dans la réunion !

  Exemple : $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$ donc $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- $A \cap B$ représente l'événement <u>intersection</u> de $A$ et de $B$, c'est-à-dire qui contient les issues de $A$ qui sont aussi dans $B$.

  Exemple : $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$ donc $A \cap B = \{2\}$.
- $\overline{A}$ est l'événement contraire de $A$. Il contient les issues de $\Omega$ qui ne sont pas dans $A$.

  Exemple : $A = \{2, 4, 6\}$ donc $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

# I/ Notations et premières propriétés

On définit alors une fonction $P$ sur l'ensemble des événements. Pour que $P$ soit une loi de probabilité, il faut que :

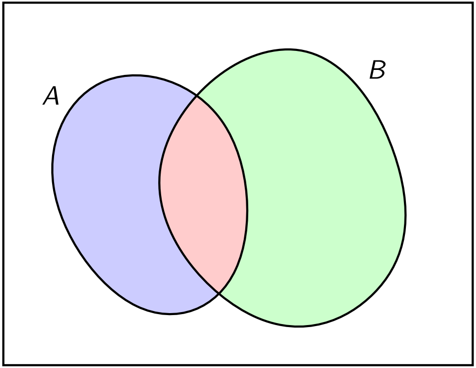
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$ pour tout événement $A$
- Si on peut décomposer un événement $E$ en événements disjoints $A$ et $B$ (on dit aussi incompatibles), alors $P(E) = P(A) + P(B)$

### Probabilité de l'événement contraire

Pour un événement $A$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

### Probabilité de l'union

Pour tous événements $A$ et $B$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.




$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

D'où il vient que $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$, d'où le résultat.

Dans une expérience aléatoire, soient deux événements $A$ et $B$. Si lors du résultat, on sait que $A$ s'est produit, alors on a gagné de l'information pour calculer la probabilité de l'événement $B$ : c'est la probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$, qui se note $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$).

Dans une expérience aléatoire, soient deux événements $A$ et $B$. Si lors du résultat, on sait que $A$ s'est produit, alors on a gagné de l'information pour calculer la probabilité de l'événement $B$ : c'est la probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$, qui se note $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$).

Exemple : je tire un élève au hasard parmi ceux du secondaire à l'EEB1. $A =$ "être en S6 francophone" et $B =$ "avoir M. Barsamian en professeur". Alors $P(B) \approx 0,05$ et $P_A(B) \approx \dfrac{1}{4}$.

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements $A$ et $B$, avec $P(A) \neq 0$. Alors on définit la probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$ par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements $A$ et $B$, avec $P(A) \neq 0$. Alors on définit la probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$ par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque : cette définition permet de calculer la probabilité de l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Exemple tiré du film “Le maître d’école” (avec Coluche) :

| Elle \ Paris-Match | Oui | Non | Total |
|---|---|---|---|
| Oui | | | 120 |
| Non | | 22 | |
| Total | 200 | | 252 |

$P(Elle) =$

$P(Elle \cap PM) =$

$P_{Elle}(PM) =$

Exemple tiré du film “Le maître d’école” (avec Coluche) :

| Elle \ Paris-Match | Oui | Non | Total |
|---|---|---|---|
| Oui | 90 | 30 | 120 |
| Non | 110 | 22 | 132 |
| Total | 200 | 52 | 252 |

$P(Elle) =$

$P(Elle \cap PM) =$

$P_{Elle}(PM) =$

Exemple tiré du film "Le maître d'école" (avec Coluche) :

| Elle \ Paris-Match | Oui | Non | Total |
|---|---|---|---|
| Oui | 90 | 30 | 120 |
| Non | 110 | 22 | 132 |
| Total | 200 | 52 | 252 |

$$P(Elle) = \frac{120}{252}$$

$$P(Elle \cap PM) =$$

$$P_{Elle}(PM) =$$

Exemple tiré du film "Le maître d'école" (avec Coluche) :

| Elle \ Paris-Match | Oui | Non | Total |
|---|---|---|---|
| Oui | 90 | 30 | 120 |
| Non | 110 | 22 | 132 |
| Total | 200 | 52 | 252 |

$$P(Elle) = \frac{120}{252}$$

$$P(Elle \cap PM) = \frac{90}{252}$$

$$P_{Elle}(PM) =$$

Exemple tiré du film "Le maître d'école" (avec Coluche) :

| Elle \ Paris-Match | Oui | Non | Total |
|---|---|---|---|
| Oui | 90 | 30 | 120 |
| Non | 110 | 22 | 132 |
| Total | 200 | 52 | 252 |

$$P(Elle) = \frac{120}{252}$$

$$P(Elle \cap PM) = \frac{90}{252}$$

$$P_{Elle}(PM) = \frac{P(Elle \cap PM)}{P(Elle)} =$$

Exemple tiré du film “Le maître d’école” (avec Coluche) :

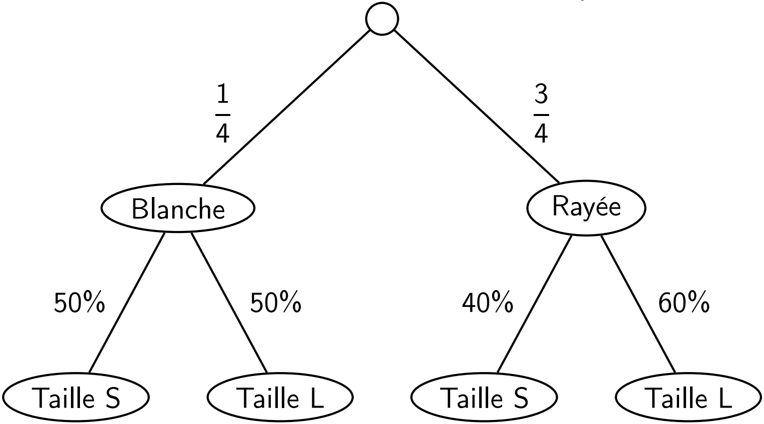
| Elle \ Paris-Match | Oui | Non | Total |
|---|---|---|---|
| Oui | 90 | 30 | 120 |
| Non | 110 | 22 | 132 |
| Total | 200 | 52 | 252 |

$$P(Elle) = \frac{120}{252}$$

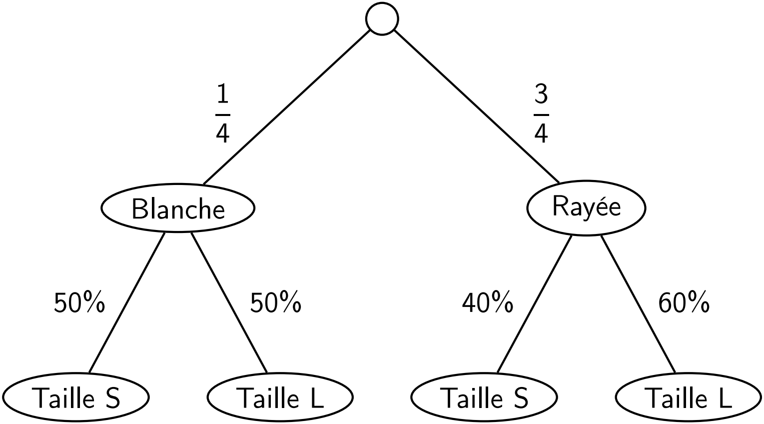
$$P(Elle \cap PM) = \frac{90}{252}$$

$$P_{Elle}(PM) = \frac{P(Elle \cap PM)}{P(Elle)} = \frac{\frac{90}{252}}{\frac{120}{252}} = \frac{90}{252} \times \frac{252}{120} = \frac{90}{120}$$

Dans un lot de chemises : $\frac{1}{4}$ de chemises blanches, le reste de rayées. Parmi les blanches, 50% de taille S et le reste de taille L. Parmi les rayées, une proportion 0.4 de taille S, le reste de taille L. On choisit au hasard une chemise dans le lot, on modélise par l'arbre suivant :

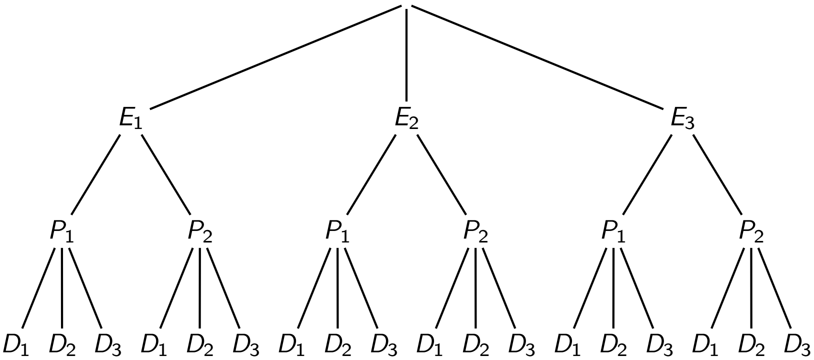


Si on tire au hasard une chemise, alors ce qu'on a noté dans cet arbre : $\frac{1}{4} = P(\text{Blanche})$ ; $\frac{3}{4} = P(\text{Rayée})$ ; $50\% = P_{\text{Blanche}}(S)$ ; $50\% = P_{\text{Blanche}}(L)$ ; $40\% = P_{\text{Rayée}}(S)$ ; $60\% = P_{\text{Rayée}}(L)$.



# III/ Dénombrement

Pour dénombrer des possibilités, on utilise souvent le principe multiplicatif. Par ex. si un restaurant propose 3 entrées, 2 plats et 3 desserts, alors on peut composer $3 \times 2 \times 3 = 18$ menus différents. Cela peut se voir sur l'arbre de dénombrement suivant (les $E_i$ sont les entrées, les $P_i$ les plats et les $D_i$ les desserts) :



Pour dénombrer des possibilités où $n$ choix peuvent prendre chacun $k$ valeurs, on obtient donc $k^n$ possibilités en tout : le premier choix peut prendre $k$ valeurs, le second aussi ($k^2$ choix pour les deux premiers), le troisième aussi ($k^3$ choix pour les trois premiers), etc.

Ex. : Si on doit choisir un code PIN contenant 4 chiffres (de 0 à 9), il y a donc $10^4 = 10\ 000$ choix possibles.

Dans le cas général, il faut faire attention à ce que l'on dénombre : est-ce que l'ordre a de l'importance ou pas ?

Pour dénombrer des groupes de $k$ éléments parmi $n$ éléments :

- si l'ordre a de l'importance : il s'agit d'un arrangement
- si l'ordre n'a pas d'importance : il s'agit d'une combinaison

Lorsque l'ordre a de l'importance, on calcule des arrangements de la manière suivante.

Ex. : Dans une compétition à 8 athlètes, on veut savoir le nombre de podiums différents possibles. L'ordre a de l'importance, car il est important de savoir quel athlète a la médaille d'or, d'argent ou de bronze. Il y a donc $8 \times 7 \times 6$ podiums différents.

Dans le formulaire :

$$\boxed{A(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Le calcul $A(8,3) = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ donne bien $8 \times 7 \times 6$.

À la calculatrice : Menu -> Probabilités -> Arrangements donne `nPr()`, il faut donc ensuite taper `nPr(8, 3)` ce qui donne 336.

Lorsque l'ordre n'a pas d'importance, on calcule des combinaisons de la manière suivante.

Ex. : Dans une classe à 25 élèves, on veut savoir le nombre de groupes de 4 personnes possibles. On peut commencer par dénombrer les groupes de 4 personnes où l'ordre est important : il y en a $A(25,4)$. Combien de fois a-t-on compté chaque groupe ? Pour 4 personnes, on a $A(4,4) = 4!$ arrangements différents (une permutation des 4 éléments). Donc, chaque groupe a été compté 4! fois au lieu d'une seule. Il suffit de diviser par 4!. On a donc $\dfrac{A(25,4)}{4!}$ groupes possibles.

Dans le formulaire :

$$\boxed{C(n,k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

À la calculatrice : Menu -> Probabilités -> Combinaisons donne `nCr()`, il faut donc ensuite taper `nCr(25, 4)` ce qui donne 12 650.

`https://www.lumni.fr/video/les-probabilites-repetition-depreuves-independantes-et-variables-aleatoires`

Dans une expérience aléatoire, une variable aléatoire, c'est une valeur réelle qui peut prendre différents résultats en fonction de l'issue obtenue. Par exemple à un jeu de hasard, le gain espéré est une variable aléatoire (on peut perdre de l'argent, donc avoir un gain négatif).

En S6 on s'intéresse à des variables aléatoires avec un nombre fini de valeurs. On peut alors écrire un tableau qui recense les probabilités des différentes valeurs possibles (la somme fait bien sûr 1).

Exemple : on joue au jeu "Formule Dé"[1]. On doit lancer le dé rouge à 8 faces numérotées 4,5,6,6,7,7,8,8. Si on note $X$ la variable aléatoire qui correspond à la valeur qu'on peut obtenir sur ce dé, on a le tableau suivant :

| $k$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{2}{8}$ |

1. http://jeuxstrategieter.free.fr/Formule_de_complet.php

Voici deux exemples plus évolués, tirés de la vie réelle :

Exemple 1 : dans un pari sportif, la côte $c$ du pari (toujours $> 1$) est le nombre par lequel il faut multiplier la somme misée qu'on récupère (on récupère donc $(c - 1) \times$ mise. Si on mise $c = 100$€ sur l'équipe A qui a une côte de 1,2 dans le match qui l'oppose à B, cela veut dire qu'il n'y a que deux valeurs possibles pour le gain : 20€ si on gagne, $-100$€ si on perd. Les probabilités de ces deux possibilités sont très difficiles à évaluer (sauf, bien sûr, s'il s'agit d'un match truqué et qu'on est au courant !)

Exemple 2 : on prend au hasard une personne dans la population, et on s'intéresse à son quotient intellectuel. C'est une variable aléatoire qui peut prendre des valeurs entre 15 (théoriquement même 0) et 230 — cas extrêmement rares [2], plus couramment autour de 40–160.

2. `https://www.science-et-vie.com/questions-reponses/quelestle-plus-gros-qi-de-tous-les-temps-10435`

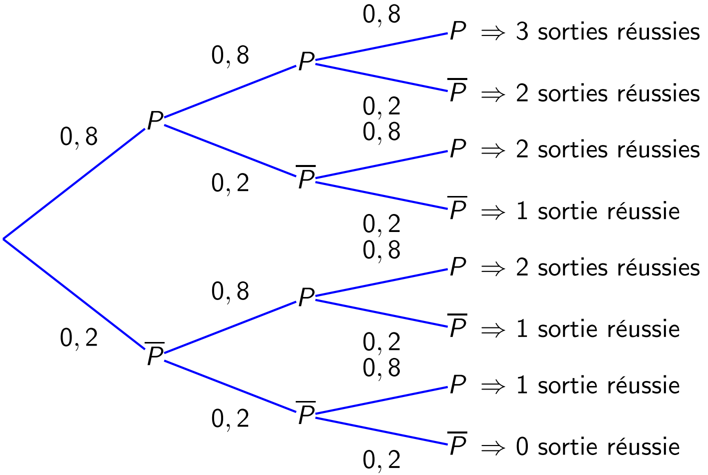
Enfin l'exemple qui clôt ce chapitre est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale (cela veut dire, qui se comporte selon la formule de la loi binomiale). On est dans ce cas lorsqu'on a répétition $n$ fois, à l'identique, de manière indépendante, d'une expérience aléatoire à deux issues ("réussite" avec probabilité $p$ et "échec" avec probabilité $1 - p$).

La formule dans ce cas est dans votre formulaire, et on va l'expliquer à la diapositive suivante. Pour tout $k$ entre 0 et $n$ (le nombre de répétitions) :

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

# IV/ Variables aléatoires, loi binomiale

Exemple : on va dans notre restaurant favori 3 fois, et à chaque fois, on a 80% de chances d'avoir une place (noté $P$), car parfois le restaurant est complet ($\overline{P}$). L'arbre complet est le suivant :



On voit sur l'arbre qu'il y a 3 branches qui correspondent au fait d'avoir 2 sorties réussies sur 3. Sur chaque branche, on a deux fois une arête à $0,8$ et une fois une arête à $0,2$, d'où une probabilité totale :

$$P(X = 2) = 3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2$$

Ce 3 vient du fait qu'il y a 3 manières possibles de mettre les 2 sorties réussies parmi les 3 fois où on va au restaurant. C'est le calcul des combinaisons de 2 parmi 3, qu'on écrit $C_3^2$. Dans le cas général, cela correspond au $C_n^k$ du formulaire.

On ne demande pas de retenir la formule (elle est dans le formulaire), on demande d'être capable de reconnaître quand on peut l'appliquer, et d'utiliser la calculatrice pour le faire (sauf éventuellement sur des cas simples comme l'exemple du restaurant, qu'il faut savoir faire à la main).