1 Rappel sur les dérivées

On appelle taux de variation de la fonction f sur l'intervalle $[a; a+h]$ le quotient : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On appelle nombre dérivé de f en a le quotient : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

La dérivée de f est la fonction qui à chaque réel x fait correspondre le nombre dérivé de f en x. Elle est notée f' : $\begin{array}{rccc} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$

La dérivée de la fonction polynôme de degré 4 : $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ est : $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$. Ce qui peut être déduit du tableau de dérivées classiques :

Si $f(x) =$	alors la dérivée de f est $f'(x) =$	sur l'intervalle
C (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^4	$4x^3$	$\mathbb{R}$

Théorème : Soit f une fonction qui admet une dérivée sur un intervalle I.
Si la dérivée est positive sur I, alors la fonction f est croissante sur I.
Si la dérivée est négative sur I, alors la fonction f est décroissante sur I.
Si la dérivée est nulle en toute valeur de I, alors la fonction f est constante sur I.

Réciproquement : Soit f une fonction qui admet une dérivée sur un intervalle I.
Si la fonction f est croissante sur I, alors la dérivée est positive sur I.
Si la fonction f est décroissante sur I, alors la dérivée est négative sur I.
Si la fonction f est constante sur I, alors la dérivée est nulle en toute valeur de I.

Application très importante : étude des variations d'une fonction f grâce au tableau de signes de sa dérivée f'.

La fonction f admet un extremum (minimum ou maximum) local en a si sa dérivée s'annule pour la valeur a en changeant de signe.

Équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ (la courbe de f) au point d'abscisse x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$.

2 Les problèmes d'optimisation

Les problèmes d'optimisation sont des problèmes dont le but est de déterminer la valeur maximale ou la valeur minimale d'une grandeur définie par une fonction.

La difficulté essentielle de ce type de problème consiste en une mise en équation des données et des inconnues.

Pour résoudre un problème d'optimisation :

- On distingue dans l'énoncé les données des inconnues.
- Parmi les grandeurs inconnues, on choisit la variable et ses bornes de variation, et on exprime les autres grandeurs en fonction de cette variable.
- On explicite la fonction (de la variable choisie) que l'on doit maximiser ou minimiser.
- On fait l'étude de cette fonction (calcul de la dérivée, étude du signe de la dérivée, variations de la fonction)
- On conclut quant au maximum ou au minimum de cette fonction.