Chapitre 1.
Phénomènes continus d'évolution

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

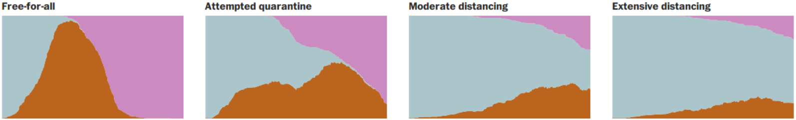
Année scolaire 2020–2021

Plan du chapitre

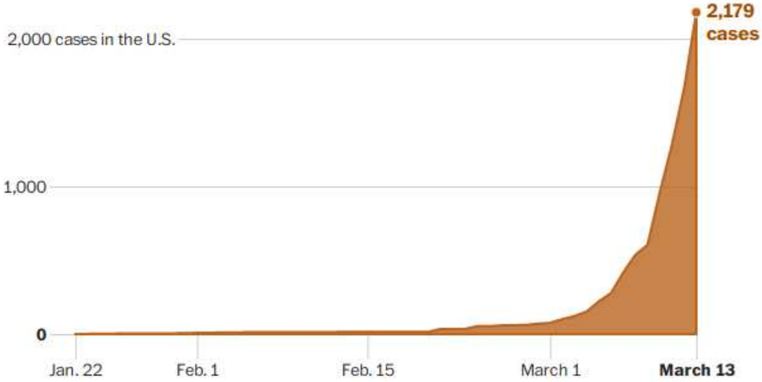
- Les fonctions exponentielles
- Les fonctions logarithmes
- Étude de certaines fonctions

Introduction : COVID-19, une croissance exponentielle

https://www.washingtonpost.com/graphics/2020/world/corona-simulator/



https://www.washingtonpost.com/graphics/2020/world/corona-simulator/



Soit $b > 0, b \neq 1$. Alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto b^x$ est la fonction exponentielle de base b.

Croissance exponentielle

Si $b > 1$, on parle de croissance exponentielle.

Exemple : placement d'argent à un taux $t > 0$.

Décroissance exponentielle

Si $0 < b < 1$, on parle de décroissance exponentielle.

Exemple : datation au carbone 14.

Remarque : si $b = 1$, la fonction $x \mapsto 1^x$ est. . . la fonction constante égale à 1 !

Remarque : si $b < 0$, on ne peut pas définir sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto b^x$.

Propriétés

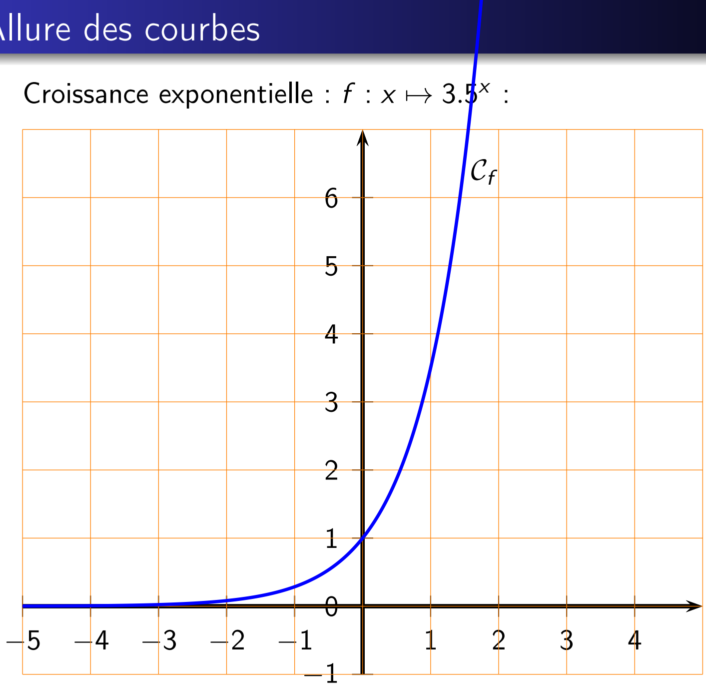
Les propriétés sur les exposants qui ont été vues lors des années précédentes sont toujours valables :

- $b^x \times b^y = b^{x+y}$
- $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$
- $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
- $(b^x)^y = b^{x \times y}$

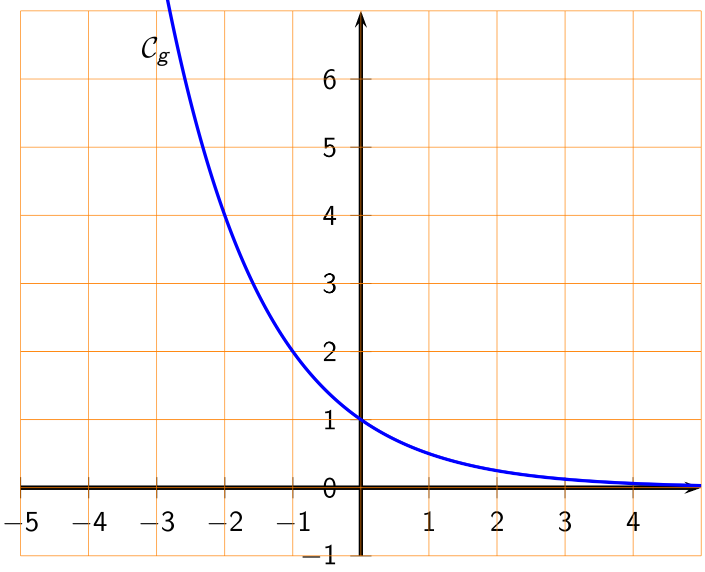
Remarque : la fonction exponentielle de base b est la fonction qui "étend" la suite géométrique $u_n = b^n$ à tous les réels, en vérifiant la propriété $b^x \times b^y = b^{x+y}$, de manière à former une fonction continue.

Remarque : pour tout $b \in \mathbb{R}$, $b^0 = 1$, donc la courbe d'une fonction exponentielle passe toujours par le point $(0, 1)$.

Croissance exponentielle : $f : x \mapsto 3.5^x$:



Décroissance exponentielle : $g : x \mapsto 0.5^x$:



On peut bien sûr résoudre graphiquement ou bien à la calculatrice une équation de type $b^x = c$ comme d'habitude.

Lorsqu'on a une équation de type $b^X = b^Y$, où l'inconnue x est dans l'exposant (dans X et/ou Y), on peut appliquer la propriété suivante :

Équation où l'inconnue est en exposant

Pour tout nombre $b > 0$, $b \neq 1$, l'équation $b^X = b^Y$ est équivalente à l'équation $X = Y$.

Exemple : si on veut résoudre l'équation $2^{x+1} = 8$, on reconnaît à gauche et à droite deux puissances de 2 (car $8 = 2^3$), c'est-à-dire $2^{x+1} = 2^3$, donc c'est équivalent à résoudre $x + 1 = 3$. On sait résoudre cette équation : cela donne $x = 2$.

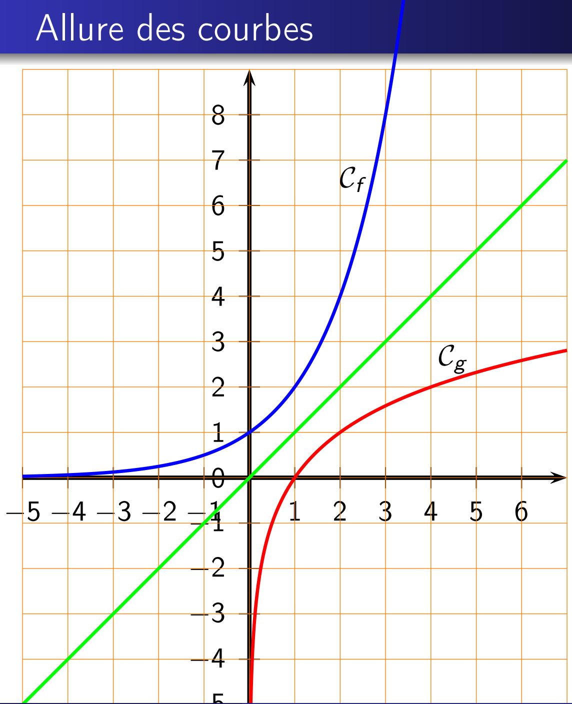
II/ Les fonctions logarithmes

Afin de pouvoir résoudre tout type d'équation $b^x = c$, on introduit les fonctions logarithmes.

La fonction logarithme de base b est la réciproque de la fonction exponentielle de base b. Cela veut dire que :

- $\log_b(b^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $b^{\log_b(x)} = x$ pour tout $x > 0$

Allure des courbes



Pour tout $b > 0, b \neq 1$, la fonction $g : x \mapsto \log_b(x)$ a son graphique qui est le symétrique du graphique de $f : x \mapsto b^x$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Ci-contre avec $b = 2$:

- $f(x) = 2^x$
- $g(x) = log_2(x)$

Une base particulière : la base e

e est un nombre particulier (qui vaut $e \approx 2.718281828$).

La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction exponentielle dont la dérivée est... elle-même ! On l'appelle la fonction exponentielle, notée parfois $\exp : x \mapsto e^x$:

- $\exp'(x) = \exp(x)$, c'est-à-dire, avec la notation de la calculatrice : $\dfrac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$

Sa fonction réciproque, la fonction logarithme de base e, est appelée "logarithme népérien", notée ln [1]. Donc $\ln : x \mapsto \log_e(x)$.

- $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$

(Remarque hors programme : on peut écrire toute fonction exponentielle à l'aide de la fonction exponentielle : $a^b = e^{b \times \ln(a)}$)

1. Prononcé "elle haine".

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$

Limites

$a > 0$ (f est croissante) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$a < 0$ (f est décroissante) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
(Si $a = 0$, f est la fonction constante égale à e^b, dans ce cas, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^b$)

Remarque : Si $a \neq 0$, 0 est une limite de la fonction (en $\pm\infty$) donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des X) est une asymptote à $\mathcal{C}_f$.

Dérivée

$f'(x) = a \times \mathrm{e}^{ax+b}$.

Remarque : Dans tous les cas, se rappeler qu'une exponentielle est toujours strictement positive !

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ (car la fonction exp ne prend que des valeurs strictement positives).

Valeurs à retenir

$\ln(e) = 1$ (car $e = e^1$) et $\ln(1) = 0$ (car $1 = e^0$).

Limites — tableau de variations

x	0	$+\infty$
Var ln	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Dérivée

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

La fonction $f(x) = \ln(ax + b)$

Ensemble de définition : il faut que $ax + b > 0$, ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
ax + b &> 0 \\
ax &> -b \qquad (-b)
\end{aligned}
$$

$\div a(a > 0)$:

$$
\begin{aligned}
x &> -\frac{b}{a} \\
x &\in \left]-\frac{b}{a} ; +\infty\right[\qquad \text{Intervalle}
\end{aligned}
$$

$\div a(a < 0)$:

$$
\begin{aligned}
x &< -\frac{b}{a} \\
x &\in \left]-\infty ; -\frac{b}{a}\right[\qquad \text{Intervalle}
\end{aligned}
$$

Dérivée

$$f'(x) = \frac{a}{ax + b}.$$

Un exemple : la fonction $f(x) = \ln(-3x+4)$

Ensemble de définition :

$$\begin{aligned} -3x+4 &> 0 \\ -3x &> -4 \\ x &< \frac{-4}{-3} \end{aligned}$$

$$x \in \left]-\infty ; \frac{4}{3}\right[$$

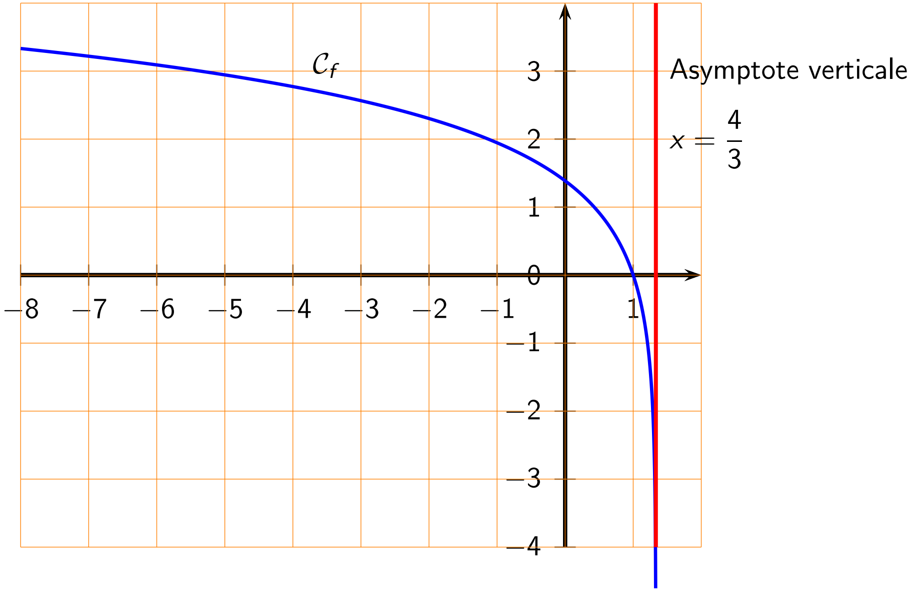
-4

$\div(-3)$

Intervalle

Dérivée : $f'(x) = \dfrac{-3}{-3x+4}$.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$
Sgn. -3		$-$	
Sgn. $-3x+4$		$+$	0
Sgn. $f'(x)$		$-$	‖
Var. f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖


$\mathcal{C}_f$
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1
Asymptote verticale
$x = \frac{4}{3}$

Un exemple : la fonction $f(x) = \ln(2x - \mathrm{e})$

Ensemble de définition :

$$\begin{aligned} 2x - \mathrm{e} &> 0 && \\ 2x &> \mathrm{e} && +\mathrm{e} \\ x &> \frac{\mathrm{e}}{2} && \div 2 \\ x &\in \left]\frac{\mathrm{e}}{2} ; +\infty\right[&& \text{Intervalle} \end{aligned}$$

Dérivée : $f'(x) = \dfrac{2}{2x - \mathrm{e}}$.

x	$\frac{\mathrm{e}}{2}$		$+\infty$
Sgn. 2		$+$	
Sgn. $2x - \mathrm{e}$	0	$+$	
Sgn. $f'(x)$	$\Vert$	$+$	
Var. f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Un exemple : la fonction $f(x) = \ln(2x - \mathrm{e})$