Chapitre 5.
Révisions probas S6

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2020–2021

- Les arbres de probabilités
- Les probabilités conditionnelles
- La loi binomiale

Considérons, dans une expérience aléatoire, deux événements A et B. On connaît :

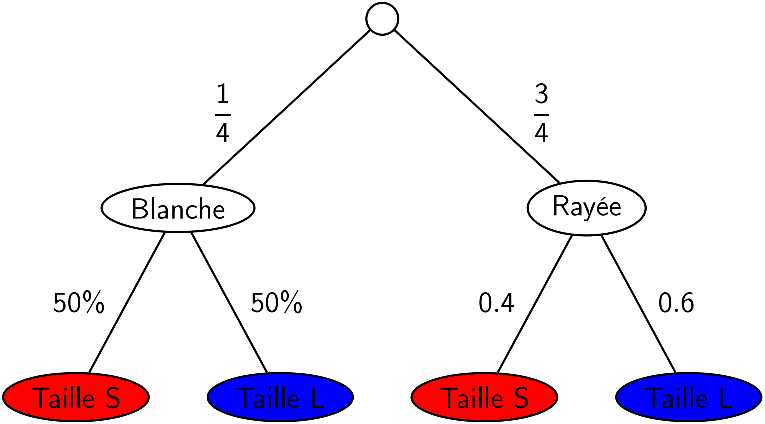
- dans Ω, la probabilité de A (et donc de $\overline{A}$)
- dans A, la probabilité de B (et donc de $\overline{B}$)
- dans $\overline{A}$, la probabilité de B (et donc de $\overline{B}$)

Un arbre pondéré sert à modéliser toutes les issues de cette expérience aléatoire : $A \cap B$; $A \cap \overline{B}$; $\overline{A} \cap B$; $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Il est constitué de noeuds et de branches reliant ces noeuds, sur lesquelles on écrit les probabilités.

I/ Les arbres pondérés : 2) Exemple

Dans un lot de chemises : $\frac{1}{4}$ de chemises blanches, le reste de rayées. Parmi les blanches, 50% de taille S et le reste de taille L. Parmi les rayées, une proportion 0.4 de taille S, le reste de taille L. On choisit au hasard une chemise dans le lot, on modélise par l'arbre suivant :



La somme des probabilités écrites sur les branches qui partent d'un noeud est égale à 1.

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités sur les branches menant de la racine à cette issue.

ex : $P(\text{Blanche} \cap \text{Taille S}) =$

Rappel : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent.

ex : $P(\text{Taille S}) =$

La somme des probabilités écrites sur les branches qui partent d'un noeud est égale à 1.

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités sur les branches menant de la racine à cette issue.

<u>ex :</u> $P(\text{Blanche} \cap \text{Taille S}) = \dfrac{1}{4} \times 50\% = 0,25 \times 0,5 = 0,125$

Rappel : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent.

<u>ex :</u> $P(\text{Taille S}) =$

La somme des probabilités écrites sur les branches qui partent d'un noeud est égale à 1.

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités sur les branches menant de la racine à cette issue.

ex : $P(\text{Blanche} \cap \text{Taille S}) = \dfrac{1}{4} \times 50\% = 0,25 \times 0,5 = 0,125$

Rappel : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent.

ex : $P(\text{Taille S}) = P(\text{Blanche} \cap \text{Taille S}) + P(\text{Rayée} \cap \text{Taille S})$

La somme des probabilités écrites sur les branches qui partent d'un noeud est égale à 1.

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités sur les branches menant de la racine à cette issue.

<u>ex :</u> $P(\text{Blanche} \cap \text{Taille S}) = \dfrac{1}{4} \times 50\% = 0,25 \times 0,5 = 0,125$

Rappel : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent.

<u>ex :</u> $P(\text{Taille S}) = P(\text{Blanche} \cap \text{Taille S}) + P(\text{Rayée} \cap \text{Taille S}) = \dfrac{1}{4} \times 50\% + \dfrac{3}{4} \times 0,4 = 0,25 \times 0,5 + 0,75 \times 0,4 = 0,125 + 0,3 = 0,425$

Considérons, dans une expérience aléatoire, deux événements A et B. Si lors du résultat de l'expérience, on sait que l'événement A s'est produit, alors on a gagné de l'information pour calculer la probabilité de l'événement B : c'est ce qu'on appelle la probabilité de B sachant A, et se note $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$).

Considérons, dans une expérience aléatoire, deux événements A et B. Si lors du résultat de l'expérience, on sait que l'événement A s'est produit, alors on a gagné de l'information pour calculer la probabilité de l'événement B : c'est ce qu'on appelle la probabilité de B sachant A, et se note $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$).

Exemple : je tire un élève au hasard parmi ceux du secondaire à l'EEB1 (Uccle). J'étudie $A =$ "être en S7 maths 3 francophone" et $B =$ "avoir M. Barsamian en professeur". Alors $P(B) \approx 0,05$ et $P_A(B) \approx 50\%$.

Considérons, dans une expérience aléatoire, deux événements A et B. Si lors du résultat de l'expérience, on sait que l'événement A s'est produit, alors on a gagné de l'information pour calculer la probabilité de l'événement B : c'est ce qu'on appelle la probabilité de B sachant A, et se note $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$).

Exemple : je tire un élève au hasard parmi ceux du secondaire à l'EEB1 (Uccle). J'étudie $A =$ “être en S7 maths 3 francophone” et $B =$ “avoir M. Barsamian en professeur”. Alors $P(B) \approx 0,05$ et $P_A(B) \approx 50\%$.

Remarque : cela revient à calculer la probabilité de l'événement B en se plaçant non plus dans l'univers total Ω de l'expérience mais dans l'univers restreint aux issues de A.

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B, avec $P(A) \neq 0$. Alors :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque : cette formule précédente permet également de calculer la probabilité de l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Exemple tiré du film “Le maître d'école” (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui			120
Non		22	
Total	200		252

$P(Elle) =$

$P(Elle \cap PM) =$

$P_{Elle}(PM) =$

Exemple tiré du film “Le maître d’école” (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	90	30	120
Non	110	22	132
Total	200	52	252

$P(Elle) =$

$P(Elle \cap PM) =$

$P_{Elle}(PM) =$

Exemple tiré du film "Le maître d'école" (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	90	30	120
Non	110	22	132
Total	200	52	252

$$P(Elle) = \frac{120}{252}$$

$$P(Elle \cap PM) =$$

$$P_{Elle}(PM) =$$

Exemple tiré du film “Le maître d'école” (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	90	30	120
Non	110	22	132
Total	200	52	252

$$P(Elle) = \frac{120}{252}$$

$$P(Elle \cap PM) = \frac{90}{252}$$

$$P_{Elle}(PM) =$$

Exemple tiré du film “Le maître d’école” (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	90	30	120
Non	110	22	132
Total	200	52	252

$$P(Elle) = \frac{120}{252}$$

$$P(Elle \cap PM) = \frac{90}{252}$$

$$P_{Elle}(PM) = \frac{P(Elle \cap PM)}{P(Elle)} =$$

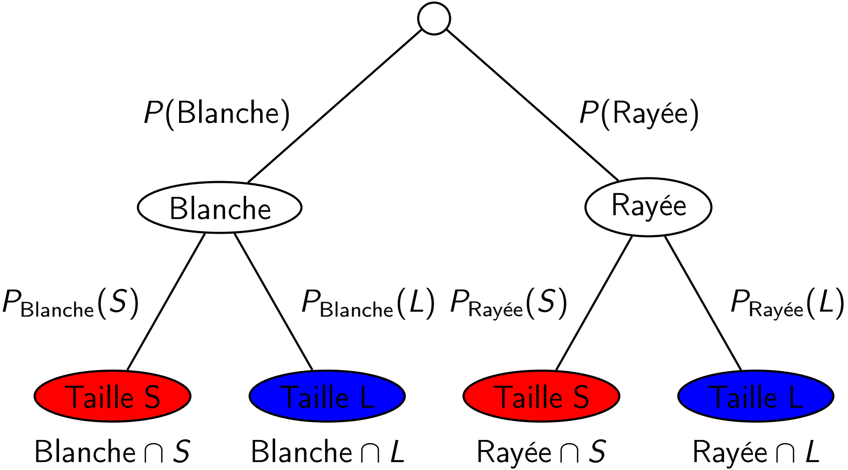
Exemple tiré du film "Le maître d'école" (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	90	30	120
Non	110	22	132
Total	200	52	252

$$P(Elle) = \frac{120}{252}$$

$$P(Elle \cap PM) = \frac{90}{252}$$

$$P_{Elle}(PM) = \frac{P(Elle \cap PM)}{P(Elle)} = \frac{\frac{90}{252}}{\frac{120}{252}} = \frac{90}{252} \times \frac{252}{120} = \frac{90}{120}$$


$P(\text{Blanche})$
$P(\text{Rayée})$
Blanche
Rayée
$P_{\text{Blanche}}(S)$
$P_{\text{Blanche}}(L)$
$P_{\text{Rayée}}(S)$
$P_{\text{Rayée}}(L)$
Taille S
Taille L
Taille S
Taille L
$\text{Blanche} \cap S$
$\text{Blanche} \cap L$
$\text{Rayée} \cap S$
$\text{Rayée} \cap L$

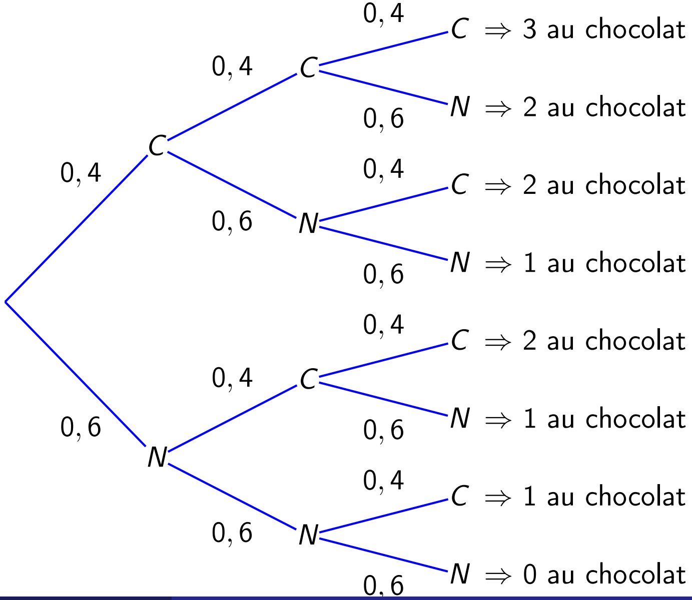
On s'intéresse maintenant à plusieurs expériences aléatoires que l'on fait à la suite. Il faut bien distinguer lorsque les expériences aléatoires sont différentes, ou lorsqu'elles sont les mêmes.

Exemple 1 : on a une boîte de 10 bonbons (8 au citron, le reste à l'orange) et on mange au hasard 3 bonbons (prebac 2019). Il s'agit d'un tirage sans remise, à chaque étage de l'arbre, les probabilités sont différentes.

Exemple 2 : une usine fabrique des biscuits au chocolat (40% au chocolat, le reste nature) et on prend au hasard 3 biscuits (prebac 2018). On peut modéliser cela par un tirage avec remise (donc, mêmes probabilités à chaque tirage) car il y a tellement de biscuits qu'en prendre 1 ne change quasiment pas la probabilité.

La loi binomiale permet de modéliser le cas numéro 2 très facilement, sans avoir besoin de faire un arbre.

C = “tirer un biscuit au chocolat” et N = “tirer un biscuit nature” :



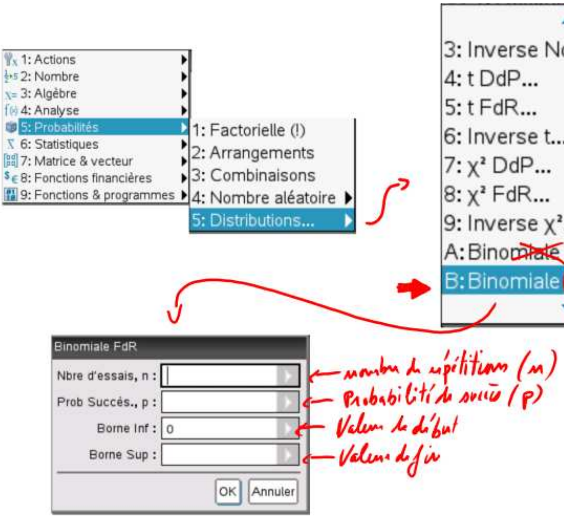
Sur chacune des 3 branches qui mène à “2 au chocolat”, la probabilité est la même. Au lieu de calculer les 3 probabilités puis leur somme, il suffit donc de calculer une seule probabilité et de multiplier par 3.

Plus généralement, il suffirait de savoir combien de branches aboutissent à un certain nombre de biscuits au chocolat... Si, à chaque expérience, on a une probabilité p d'obtenir un biscuit au chocolat, qu'on tire n biscuits, et qu'on note X la variable aléatoire “nombre de biscuits tirés au chocolat”, alors pour tout k (entre 0 et n) :

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Ici avec $n = 3$ et $k = 2$ on retrouve bien $C_3^2 = \dfrac{3!}{2! \times (3 - 2)!} = \dfrac{3!}{2! \times 1!} = \dfrac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$.

III/ La loi binomiale : 3) À la calculatrice



Ex : Pour $X \sim \mathcal{B}(3, 0{,}2)$ $p(X=2)$: $0{,}096$

} paramètres de X

binomCdf(3,0.2,2,2) 0.096

Pour $X \sim \mathcal{B}(12, 0{,}3)$

$p(X \leq 5) = 0{,}882151$

binomCdf(12,0.3,0,5) 0.882151

$p(X \geq 8)$

binomCdf(12,0.3,8,12) 0.009489

Toujours pour une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{B}(12, 0.3)$: