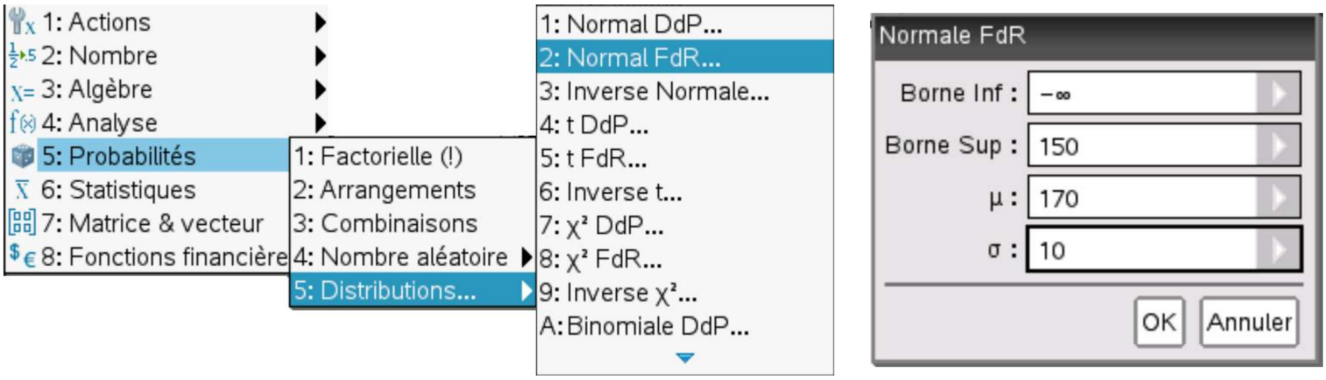
Exercice 1

La courbe de Gauss du diaporama correspond à une loi normale de moyenne 170 cm et d'écart-type 10 cm. Dans une population, la taille des personnes suit cette loi de probabilité. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard dans cette population ait une taille inférieure à 150 cm ?

À la calculatrice, on utilise `normCdf` où μ est la moyenne de la loi normale et σ est l'écart-type :



`normCdf(−∞, 150, 170, 10)`   `0.02275`

Exercice 2

1. Une variable aléatoire continue Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. Calculer les probabilités :

   (a) $P(Z \leq -1)$ (b) $P(Z > 1)$ (c) $P(-1 \leq Z \leq 1)$

2. Une variable aléatoire continue Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

   (a) On donne $P(Z \leq a) = 90\%$. Calculer a.   (b) Même question si $P(Z > a) = 10\%$.

   Remarque : pour tout nombre z on a $P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$ (simplement parce que les deux événements sont disjoints et forment l'univers).

3. La taille des enfants à un certain âge suit une loi normale de moyenne 162 cm et d'écart type 5 cm. On choisit un enfant au hasard dans ce groupe d'âge. Déterminer la probabilité pour qu'il ait une taille :

   (a) inférieure à 165 cm   (b) supérieure à 175 cm   (c) comprise entre 165 et 175 cm

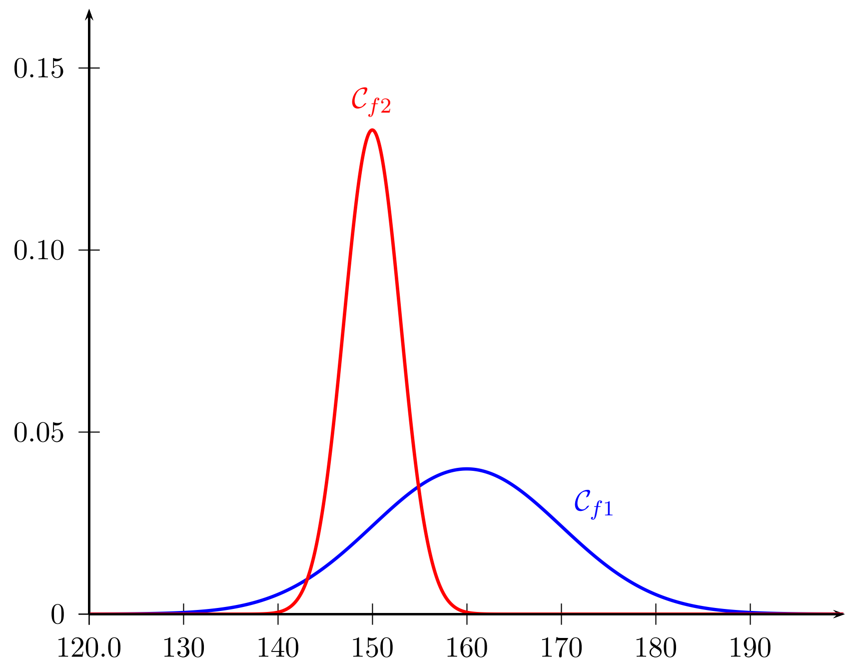
4. Un certain type de choux a une masse distribuée normalement selon la loi de moyenne 1 kg et d'écart type 0,15 kg. Un camion a un chargement de 800 choux. Estimer le nombre de choux du chargement dont la masse est :

   (a) supérieure à 0,79 kg   (b) plus petite que 1,13 kg   (c) comprise entre 0,85 kg et 1,15 kg.

   Indication : on pourra commencer par calculer les probabilités pour un chou, puis reconnaître une situation dans laquelle on peut utiliser la loi binomiale.

Exercice 3

On considère les deux lois normales n_1 et n_2 dont on donne les graphiques des fonctions de répartition f_1 et f_2 ci-après :



1. Lire sur le graphique μ, l'espérance de chacune des deux lois (la moyenne d'une variable aléatoire qui suit cette loi).
2. Quelle est la loi qui a le plus grand écart-type ? Justifier.
3. Illustrer sur le graphique ce à quoi correspond $p = \int_{-\infty}^{150} f_1(x)dx$.
4. On donne $p = 0,16$. Combien vaut $q = \int_{150}^{170} f_1(x)dx$? Si X est une variable aléatoire qui suit la loi n_1, à quoi correspond q en terme de probabilité ?

Exercice 4

Les probabilités demandées seront données sous leur forme décimale arrondie à $0,001$ près.

Une entreprise vend 2 types de meubles : M1, M2 respectivement 419 euros et 509 euros l'unité.
La demande mensuelle en meubles M1 est : une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(85\ ;\ 15^2\right)$.
La demande mensuelle en meubles M2 est : une variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(52\ ;\ 8^2)$.
On suppose que X et Y sont indépendantes.

Partie A : Dans cette question, on suppose que le stock est suffisant pour satisfaire la demande. Ainsi, l'entreprise vend mensuellement X meubles M1 et Y meubles M2.

Calculer les probabilités (un mois donné) d'avoir les évènements suivants :

V1 on vendra au plus 80 meubles M1.

V2 on vendra au plus 70 meubles M2.

Partie B : Dans cette question, le stock n'est pas obligatoirement suffisant pour satisfaire la demande. L'entreprise dispose en début de mois d'un stock de 80 meubles M1 et 70 meubles M2.

Quelles sont les probabilités des évènements suivants :

S1 il y aura rupture de stock en meubles M1.

S1 il y aura rupture de stock en meubles M2.

S il y aura rupture de stock (en meubles M1 ou M2).

(La rupture de stock concerne la fin du mois, et signifie que la demande est supérieure au stock).

Exercice 5

Une compagnie a un contrat d'entretien pour 300 ascenseurs. On admet que, chaque semaine, la probabilité de panne d'un ascenseur est de $\frac{1}{75}$.

On suppose l'indépendance entre les pannes d'un même ascenseur ainsi que de deux ascenseurs différents.

Partie A : Soit X la variable aléatoire qui, à toute semaine, associe le nombre de pannes du parc complet des ascenseurs.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Donner ses paramètres.
2. Calculer à $0,01$ près, la probabilité pour que lors d'une semaine il y ait (strictement) moins de 2 pannes ?

Partie B : On considère la variable aléatoire Z qui, à tout adulte, usager d'ascenseurs, choisi au hasard, associe son poids en kg. On suppose que Z suit la loi normale d'espérance mathématique 70 kg et d'écart type 15 kg.

1. Calculer, à $0,01$ près, la probabilité pour qu'un adulte, usager d'ascenseurs, choisi au hasard, pèse moins de 90 kg.

Exercice 6

Après avoir effectué une étude statistique, on admet qu'un passant pris au hasard dans la galerie marchande entre dans la pharmacie avec une probabilité de $0,15$.

On prélève de façon aléatoire, un échantillon de 40 usagers de la galerie marchande (on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise).

On désigne par X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de personnes qui entrent dans la pharmacie, parmi les 40 usagers de l'échantillon.

1. (a) Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Préciser les paramètres.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et donner par une phrase simple une interprétation.
   (c) Calculer les probabilités $P(X = 0)$ et $P(X \geq 1)$ (on donnera les valeurs arrondies à la quatrième décimale)
2. Soit Y, la variable aléatoire, qui un jour donné, décompte le nombre de clients entrés dans la pharmacie entre 18h et 19h. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(30\ ;\ 4^2)$.
   (a) Calculer les probabilités $P(Y \geq 34)$ et $P(26 \leq Y \leq 34)$ (on donnera les valeurs arrondies à la quatrième décimale)
   (b) Déterminer le nombre réel a tel que $P(Y \geq a) = 0,04$. En arrondissant le nombre a à l'entier le plus proche, traduire par une phrase cette dernière égalité.

Exercice 7 — Baccalauréat européen, juin 2013

Lors d'une étude, une population est divisée en deux groupes A et B.

Pour le groupe A, le rythme cardiaque au repos, en pulsations par minute, est normalement distribué avec une moyenne de 80 et un écart type de 10.

1. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans le groupe A ait un rythme cardiaque au repos compris en 70 et 100 ?
2. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans le groupe A ait un rythme cardiaque au repos inférieur à k est de $0,16$. Calculer k.

Pour le groupe B, le rythme cardiaque au repos, en pulsations par minute, est normalement distribué.

3. 95% des personnes du groupe B ont un rythme cardiaque au repos entre 40 et 60, cet intervalle étant centré autour de la moyenne. Calculer la moyenne et l'écart-type des rythmes cardiaques du groupe B.

98% de la population appartiennent au groupe A, le reste au groupe B. Vous utiliserez les valeurs $\mu = 50$ et $\sigma = 5$ pour la moyenne et l'écart-type dans le groupe B.

4. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un rythme cardiaque au repos inférieur à 55.
5. Calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population appartienne au groupe B étant donné que cette personne a un rythme cardiaque au repos inférieur à 55.

Exercice 8 — Baccalauréat européen, juin 2015

Utiliser la calculatrice pour les calculs de b), c), d) et e).

Dans une cantine scolaire, on propose trois menus (poisson, viande, végétarien). La probabilité qu'un élève choisisse le menu végétarien est de 0,20.

Un jour donné, on a préparé 28 menus végétariens. Ce jour-là, 120 élèves mangent à la cantine.

a) Déterminer l'espérance mathématique du nombre de menus végétarien choisis.

b) Calculer la probabilité qu'on ait préparé suffisamment de menus végétariens.

c) Calculer le nombre de menus végétariens qu'il aurait fallu préparer de telle sorte que la probabilité qu'on en ait préparé suffisamment soit d'au moins 0,98.

Dans une grande cantine universitaire, on propose trois menus (poisson, viande, végétarien).

Le nombre de menus poisson choisis par jour suit une distribution normale de moyenne $\mu = 240$. Pour 95% des jours, le nombre de menus poisson choisis est compris entre 200 et 280.

d) Calculer l'écart-type du nombre de menus poisson choisis par jour.

e) Utiliser un écart-type de $\sigma = 20$. Est-il réaliste de supposer qu'un jour plus de 320 menus poisson soient choisis ?