1 Les fonctions au programme

- fonctions polynomiales : $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.
- fonction exponentielle : e^x
- fonction logarithme népérien : $\ln(x)$
- également e^{ax+b} et $\ln(ax+b)$

2 Dérivées

• La dérivée de f en a, c'est la limite du taux d'accroissement moyen $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. C'est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

• La dérivée permet d'étudier l'évolution d'une fonction (dérivée positive ⇔ fonction croissante ; dérivée négative ⇔ fonction décroissante). On a un <u>extremum</u> quand la dérivée s'annule en changeant de signe (maximum quand elle fait "+ 0 -" et minimum quand elle fait "- 0 +").

• Remarque : au lieu de dire "nombre dérivé" on dit parfois "<u>taux d'accroissement instantané</u>".

Si $f(x) =$	alors la dérivée de f est $f'(x) =$	sur l'intervalle	
x^n	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
e^{ax+b}	$a \times \mathrm{e}^{ax+b}$	$\mathbb{R}$	(pas dans le formulaire)
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$	
$\ln(ax+b)$	$\dfrac{a}{ax+b}$	là où $ax+b>0$	(pas dans le formulaire)

• Ex. : si $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{4}\ln(x) + 0,2\mathrm{e}^{2x+3}$ alors $f'(x) = 3 \times 2x + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{x} + 0,2 \times 2\mathrm{e}^{2x+3} = 6x + \dfrac{1}{4x} + 0,4\mathrm{e}^{2x+3}$.

• <u>Équation de la tangente</u> à $\mathcal{C}_f$ (la courbe de f) au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

3 Primitives, intégrales

• Une primitive F de f, c'est une fonction dont la dérivée fait f (calcul de primitive et calcul de dérivée sont deux opérations réciproques).

• L'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[a;b]$, c'est l'aire entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équation $x=a$ et $x=b$. ⚠ Pour une fonction négative, c'est l'opposé de l'aire.

Si $f(x) =$	alors les primitives de f sont $F(x) =$	sur l'intervalle
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathrm{e}^x + k$	$\mathbb{R}$
$a\mathrm{e}^{ax+b}$	$\mathrm{e}^{ax+b} + k$	$\mathbb{R}$
e^{ax+b}	$\dfrac{1}{a} \times \mathrm{e}^{ax+b} + k$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + k$	là où $x \neq 0$
$\dfrac{a}{ax+b}$	$\ln\|ax+b\| + k$	là où $ax+b \neq 0$
$\dfrac{1}{ax+b}$	$\dfrac{1}{a} \times \ln\|ax+b\| + k$	là où $ax+b \neq 0$

• Exemple : si $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{4x+1} + 2\mathrm{e}^{2x+3}$ alors $F(x) = 3 \times \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4} \times \ln|4x+1| + \mathrm{e}^{2x+3}$.

• <u>Formule de Chasles</u> : $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Application : ex. A5 `http://www.barsamian.am/EE_examens/S7P3_Annales_bac/2015_MAT3P_FR_A.pdf`.

On connaît $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 1,6$ et $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3,6$, on en déduit donc que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

• <u>Intégrale entre a et b</u>, <u>aire entre deux courbes</u> : formules du formulaire.

4 Résolution d'équations

Vous devez savoir résoudre des équations simples où l'inconnue est en puissance ou dans un logarithme. Quelques exemples (les deux premiers tirés du test 1, le 3e du prébac 2021) :

1. Pour résoudre $4^{x+1} = 16^{2x-1}$, on écrit les deux expressions comme puissance d'un même nombre, car deux puissances d'un même nombre sont égales si et seulement si les exposants sont égaux. Ici, on voit que $16 = 4^2$, donc $16^{2x-1} = \left(4^2\right)^{2x-1} = 4^{2\times(2x-1)}$. Ainsi, on peut réécrire l'équation :

$$\begin{aligned}
4^{x+1} &= 4^{2\times(2x-1)} && \text{Exposants égaux}\\
x+1 &= 2\times(2x-1) && \text{Simplification}\\
x+1 &= 4x-2 && -x\\
1 &= 3x-2 && +2\\
3 &= 3x && \div 3\\
1 &= x
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$.

2. Pour résoudre $3\ln(4x) = 8$, on utilise la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}
3\ln(4x) &= 8 && \div 3\\
\ln(4x) &= \tfrac{8}{3} && \text{Exponentielle}\\
\mathrm{e}^{\ln(4x)} &= \mathrm{e}^{\frac{8}{3}} && \mathrm{e}^{\ln(a)} = a\\
4x &= \mathrm{e}^{\frac{8}{3}} && \div 4\\
x &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}}{4}
\end{aligned}$$

On vérifie que la solution est bien dans l'ensemble de définition : $\ln(4x)$ est définie quand $4x > 0$ (c'est-à-dire $x > 0$, sur $]0;+\infty[$). La solution est bien dans cet ensemble car $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}}{4} \approx 3.6$.

$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}}{4}\right\}}$.

3. Pour résoudre $2\mathrm{e}^{-3x-3} + 4 = 6$, on utilise la fonction logarithme népérien :

$$\begin{aligned}
2\mathrm{e}^{-3x-3} + 4 &= 6 && -4\\
2\mathrm{e}^{-3x-3} &= 2 && \div 2\\
\mathrm{e}^{-3x-3} &= 1 && \text{On compose par } x \mapsto \ln(x)\\
\ln\left(\mathrm{e}^{-3x-3}\right) &= \ln(1) && \ln\left(\mathrm{e}^{y}\right) = y\\
-3x-3 &= 0 && +3x\\
-3 &= 3x && \div 3\\
-1 &= x
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-1\}}$.

- Application : pour les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on peut résoudre $f(x) = g(x)$.

5 À la calculatrice

- Calcul de limites : ex. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
- Calcul d'intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- Calcul de dérivées : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$
- Calcul d'aires : $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$
- Équation de la tangente : $\mathit{tangentLine}(f(x), x, a)$ (menu, analyse, tangente)
- Signe de la dérivée : $\mathit{solve}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) > 0, x\right)$
- Maximum d'une fonction sur l'intervalle $[a;b]$: $fMax(f(x), x, a, b)$ (menu, analyse, maximum). Remarque : si on ne met rien pour a et b, ça calcule sur $\mathbb{R}$. ⚠ Cet outil donne la valeur de x pour laquelle f est maximale (donc, la valeur pour laquelle le maximum est atteint). Pour trouver la valeur maximale, il faut calculer l'image de cette valeur par f ! Ex. si $f(x) = \dfrac{678}{2 + \mathrm{e}^{-x}}$, la calculatrice répond $x = \infty$ ce qui veut dire que "le maximum est atteint en l'infini" (à abus de langage près), et donc pour calculer la valeur maximale, il faut calculer la limite de f en ∞ (la calculatrice donne 339).
- Minimum avec $fMin$, mêmes remarques que précédemment.
- Je rappelle également cette vidéo sur les dérivées et les variations d'une fonction :

`https://www.youtube.com/watch?v=7VAH9qpIB-E`