Chapitre 1.
Nombres

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2021–2022

Plan du chapitre

- Rappels
- Les nombres premiers
- La racine carrée

I/ Rappels

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, où :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$: les nombres entiers naturels
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$: les nombres entiers relatifs
- $\mathbb{D}$: les nombres décimaux
- $\mathbb{Q}$: les nombres rationnels (les fractions)
- $\mathbb{R}$: les nombres réels

Remarque : $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ représente les nombres irrationnels. (ex. : π, $\sqrt{2}$)

Pour tous nombres a et b dans $\mathbb{N}$, $a + b \in \mathbb{N}$ et $a \times b \in \mathbb{N}$.

Mais... $2 - 5 \notin \mathbb{N}$: pour pouvoir soustraire, il faut $\mathbb{Z}$.

Tout nombre e dans $\mathbb{Z}$ a un opposé : c'est le nombre f tel que $e + f = 0$. On le note $-e$.

Effectivement : $e + (-e) = e - e = 0$.

Remarque : 0 n'a pas été choisi au hasard, c'est l'élément neutre de $+$, c'est-à-dire que $a + 0 = a$ (0 « ne sert à rien » dans une addition).

Propriétés intéressantes :

- $+$ est commutative $(a + b = b + a)$ et associative $((a + b) + c = a + (b + c))$
- $\times$ (aussi notée $\cdot$) est également commutative et associative
- Ne fonctionne pas avec $-$: $2 - (3 - 5) \neq (2 - 3) - 5$.
- $+$ se distribue par rapport à $\times$:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (x - 1) \\ = \quad & 3 \cdot x - 3 \cdot 1 \\ = \quad & 3x - 3 \end{aligned}$$

On distribue.

On simplifie.

- Ordre « PEMDAS » : parenthèses, exposants, multiplications, divisions, additions, soustractions.

Définition : Nombre premier
Si $n \in \mathbb{N}$, on dit que n est un nombre premier si n a exactement deux diviseurs distincts : 1 et n.

Remarques : 0 n'est pas premier (il a une infinité de diviseurs).
1 n'est pas premier (dans son cas, 1 et n ne sont pas distincts).

Les premiers nombres premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Théorème (fondamental de l'arithmétique)
Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors n admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers (à l'ordre près).

Ex. $75 = 3 \times 5^2 = 5 \times 3 \times 5$ (mêmes nombres premiers, seul l'ordre change).

> “Suppose, for example, that two 80-digit numbers p and q have been proved prime ; ... Suppose further, that the cleaning lady gives p and q by mistake to the garbage collector, but that the product pq is saved. How to recover p and q ? It must be felt as a defeat for mathematics that, in these circumstances, the most promising approaches are searching the garbage dump and applying mnemo-hypnotic techniques.
>
> H. W. Lenstra, Jr., “Primality testing” (1982), (pp. 55–77)”

Définition : Plus grand commun diviseur (PGCD)
Si m, n sont dans $\mathbb{N}$, on appelle $\mathrm{pgcd}(\mathrm{m}, \mathrm{n})$ le plus grand nombre entier qui divise à la fois m et n.

Pour mettre sous forme irréductible une fraction $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, il faut et il suffit de diviser en haut et en bas par $\mathrm{pgcd}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$.

Deux méthodes pour calculer $\mathrm{pgcd}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$:

- décomposition en facteurs premiers de a et b
- algorithme d'Euclide

<u>Exemple :</u> calcul de $\mathrm{pgcd}(21, 30)$.

$\mathrm{pgcd}(2^3 \times 5 \times 7^2, 2 \times 7^3 \times 11 \times 19) = 2 \times 7^2$

On prend les nombres premiers qui apparaissent dans les deux décompositions, et on prend la plus petite puissance des deux.

Pour le PPCM, c'est le contraire : on prend les nombres premiers qui apparaissent dans au moins l'une des deux décompositions, et on prend la plus grande puissance.

$\mathrm{ppcm}(2^3 \times 5 \times 7^2, 2 \times 7^3 \times 11 \times 19) = 2^3 \times 5 \times 7^3 \times 11 \times 19$

Remarque : $\mathrm{ppcm}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \dfrac{\mathrm{a} \times \mathrm{b}}{\mathrm{pgcd}(\mathrm{a}, \mathrm{b})}$.

La racine carrée est l'opération réciproque à l'opération d'élévation au carré.

Se demander "quel est le nombre, qui, au carré, donne 25 ?" c'est exactement se demander "quelle est la racine carrée de 25 ?". On peut donc écrire $5 = \sqrt{25}$ (ce symbole est la racine carrée).

Ce qu'on a vu est résumé dans la petite vidéo suivante (3 minutes 30) :

https://www.lumni.fr/video/petits-contes-mathematiques-la-racine-carree

1) Notion de racine carrée :

Définition : racine carrée

Soit a ≥ 0. Le nombre positif qui, élevé au carré, donne a s'appelle la racine carrée de a. Ce nombre est noté $\sqrt{\mathrm{a}}$.

Exemples :

- $5 = \sqrt{25}$
- $0,7 = \sqrt{0,49}$

Première propriété : puisque l'élévation au carré et la racine carrée sont deux opérations réciproques (pour des nombres positifs), on a donc :

Racine carrée et carré

Si a est un nombre positif, alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Cela n'est vrai que quand a est positif ! Par exemple, le carré de -3 existe et vaut 9, mais la racine carrée de 9 est 3, pas -3.

Remarque : (hors programme) En règle générale, pour $a \in \mathbb{R}$ (positif ou négatif), $\sqrt{a^2} = |a|$ (la valeur absolue de a : c'est a si a est positif, $-a$ sinon).

Puisque le carré d'un nombre (réel) est toujours positif, un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée ! Par exemple, cela n'a pas de sens (à notre niveau) d'écrire $\sqrt{-1}$.

Racines carrées irrationnelles

Si a est un nombre entier qui n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{a}$ est irrationnel).

Exemple : 2 n'est pas un carré parfait donc $\sqrt{2}$ est irrationnel (ce n'est pas une fraction). Cela veut dire que son développement décimal n'est pas périodique : $\sqrt{2} \approx 1,414213562\ldots$

Il n'existe donc pas de manière exacte d'écrire le nombre $\sqrt{2}$ avec un développement décimal. Quand on demande une valeur exacte d'un calcul où il y a $\sqrt{2}$, il faut donc laisser $\sqrt{2}$, et ne pas demander à la calculatrice de donner une valeur approchée.

Démonstration :

$\sqrt{2}$ est un irrationnel (ce n'est pas une fraction)

Par l'absurde : on va supposer que c'est vrai et on va montrer que ça aboutit à une absurdité.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

m/n est irréductible, c'est-à-dire que m et n n'ont pas de facteur premier commun (ils ne sont pas divisibles tous les deux par un autre nombre que 1)

élever au carré

$2 = \frac{m^2}{n^2}$

$2 \times n^2 = m^2 \Rightarrow \boxed{m = 2k}$

$2 \times n^2 = (2k)^2$

$2n^2 = 4k^2$

$n^2 = 2k^2 \Rightarrow \boxed{n = 2\ell}$

$\Rightarrow$ contradiction $\Rightarrow \sqrt{2}$ n'est pas une fraction.

2) Calculs avec des racines carrées :

Produit de racines

Si a et b sont deux nombres positifs, alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Démonstration : on rappelle que $(xy)^2 = x^2y^2$, pour tous nombres x et y. Calculons maintenant :

- $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$ (d'après la définition).
- $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$ (d'après la propriété rappelée puis la définition).

On a donc deux nombres positifs dont les carrés sont égaux, c'est donc en fait le même nombre !

⚠ Pas de formule avec la racine d'une somme ! $\sqrt{a+b}$ n'est <u>pas</u> égal à $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. En revanche, pour le quotient :

Quotient de racines

Si a et b sont deux nombres positifs et $b \neq 0$, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

<u>Démonstration :</u> on rappelle que $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \dfrac{x^2}{y^2}$, pour tous nombres x et $y \neq 0$. Calculons maintenant :

- $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$ (d'après la définition).
- $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \dfrac{a}{b}$ (d'après le rappel et la définition).

On a donc deux nombres positifs dont les carrés sont égaux, c'est donc en fait le même nombre !