Chapitre 3.
Probabilités

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2021–2022

Plan du chapitre

- Notations
- Calculs de probabilités
- Quelques propriétés

Introduction

> *Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la loi des grands nombres. Elle consiste en ce que, si l'on observe des nombres très considérables d'événements d'une même nature, dépendant de causes constantes et de causes qui varient irrégulièrement, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, c'est-à-dire sans que leur variation soit progressive dans aucun sens déterminé, on trouvera, entre ces nombres, des rapports à très peu près constants. Pour chaque nature de choses, ces rapports auront une valeur spéciale dont ils s'écarteront de moins en moins, à mesure que la série des événements observés augmentera davantage, et qu'ils atteindraient rigoureusement s'il était possible de prolonger cette série à l'infini.*
>
> *S.D. Poisson, "Recherches sur la probabilité des jugements" (1838), Préambule (page 7)*

> *Une remarque encore est nécessaire : l'infini n'est pas un nombre ; on ne doit pas, sans explication, l'introduire dans les raisonnements. La précision illusoire des mots pourrait faire naître des contradictions. Choisir au hasard, entre un nombre infini de cas possibles, n'est pas une indication suffisante.*
>
> *J. Bertrand, "Calcul des probabilités" (1889), Chapitre I (page 4)*

I/ Notations

Une expérience aléatoire est composée de différentes issues (on dit aussi événements élémentaires). On note souvent Ω l'ensemble des issues, et on l'appelle univers.

Par exemple si l'expérience aléatoire consiste à lancer un dé cubique où les faces sont numérotées de 1 à 6, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Un événement est un sous-ensemble de Ω.

Dans l'exemple précédent, l'événement $A =$ "obtenir un nombre pair" est l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

Remarque : les événements sont toujours rapportés à une expérience donnée, ainsi obtenir un nombre pair ici n'a que 3 issues possibles, cela serait différent dans une autre expérience aléatoire (si on jouait à la roulette, par exemple, qui contient les nombres de 0 à 36).

II/ Calculs de probabilités

Quand on joue à pile ou face, on dit souvent qu'on a "une chance sur deux" de gagner. Cela veut dire qu'il y a deux possibilités (pile, face) et que chacune des deux possibilités a autant de chance que l'autre de se produire (d'où, une chance sur deux de gagner).

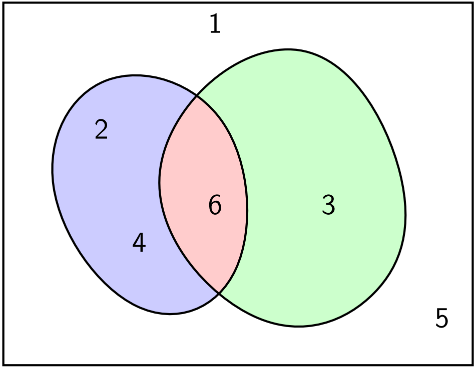
La probabilité d'un événement, c'est donc la "chance" qu'on a de voir cet événement se réaliser. Une chance de 100% ($= 1$), c'est quand on est certain que l'événement se produit. Et une chance de 0, c'est quand l'événement ne se produit jamais. Une probabilité est donc toujours entre 0 et 1.

Le cas de la pièce est un exemple de situation d'équiprobabilité, où toutes les issues ont la même probabilité. Dans ce cas, on calcule la probabilité d'un événement E par la formule :

$$P(E) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas au total}}$$

Pour les probabilités, on peut dessiner un diagramme de Venn : c'est un diagramme sur lequel on écrit toutes les issues, et sur lequel on pourra entourer différents événements pour les dénombrer facilement.

Je lance un dé équilibré à 6 faces :



On dessine un rectangle qui contient les issues.

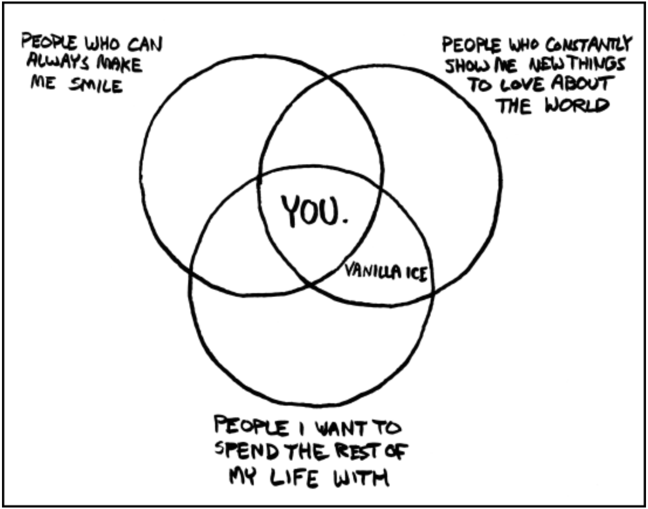
On dessine une première "patate" pour entourer l'événement A = "obtenir un nombre pair".

À droite l'événement B = "obtenir un multiple de 3".

Du coup, sur le dessin, le 6 est dans les deux "patates", car il est dans les deux événements.

Situation d'équiprobabilité donc $P(A) = \dfrac{3}{6}$ et $P(B) = \dfrac{2}{6}$.

Un autre exemple de diagramme de Venn :



Source : `https://xkcd.com/112/`

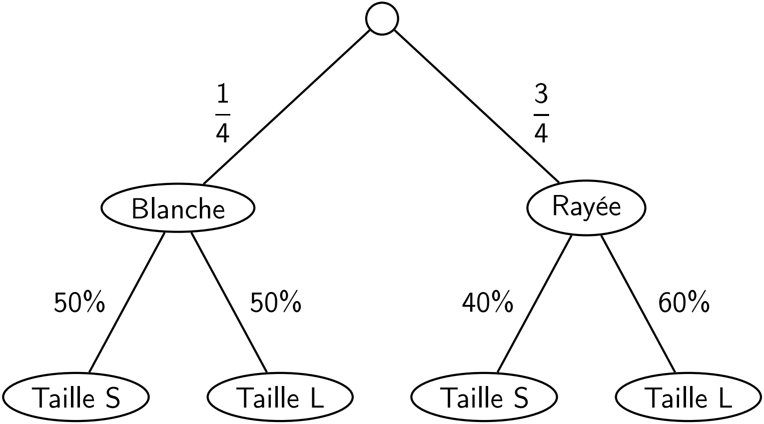
Parfois, une expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes. Parfois on dessine un tableau à double entrée : en colonne une étape, en ligne l'autre. Par ex. si on lance un dé à 8 faces, un dé à 12 faces, et qu'on souhaite connaître les sommes possibles, on obtient le tableau :

Dé 8 \ Dé 12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

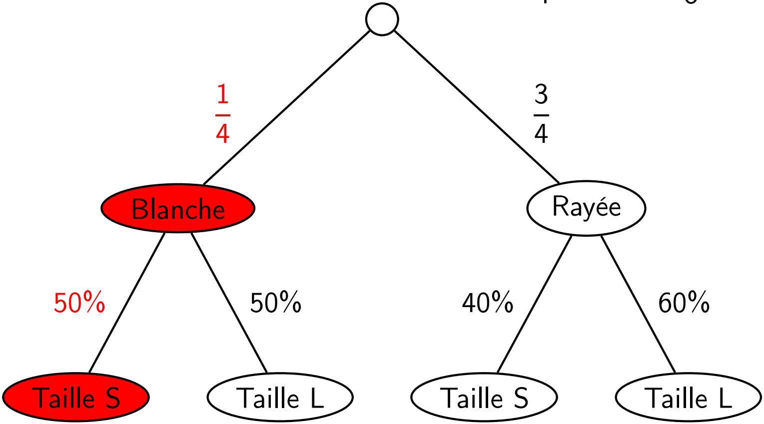
Un tel tableau est utile quand on est dans une situation d'équiprobabilité, à la fois pour les lignes et les colonnes. Ici c'est le cas. On peut calculer par exemple $P(17) = \dfrac{4}{96}$ (4 cases correspondent à une somme de 17, sur un total de $8 \times 12 = 96$ cases).

II/ Calculs de probabilités

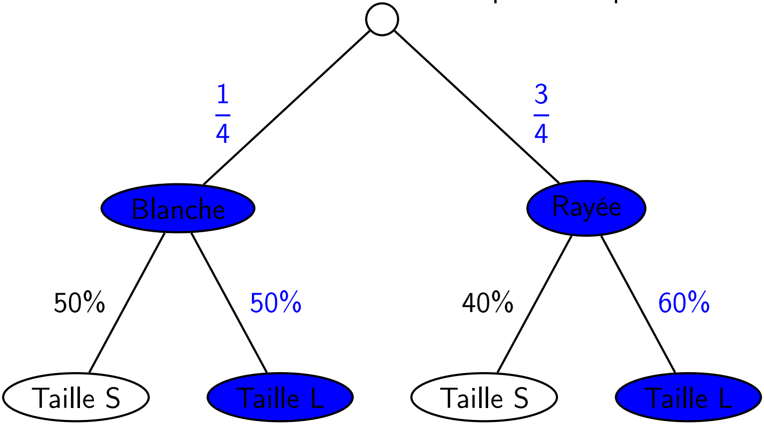
Parfois, une expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes. Parfois on dessine un arbre, avec un étage pour chaque étape. Par ex. on considère un lot de chemises : $\frac{1}{4}$ de chemises blanches, le reste de rayées. Parmi les blanches, 50% de taille S et le reste de taille L. Parmi les rayées, 40% de taille S, le reste de taille L :



Pour calculer la probabilité d'un événement qui est sur une branche, on multiplie les probabilités sur la branche. Par ex. la probabilité de tirer une chemise blanche de taille S est de $\frac{1}{4} \times 50\% = \frac{1}{8}$.

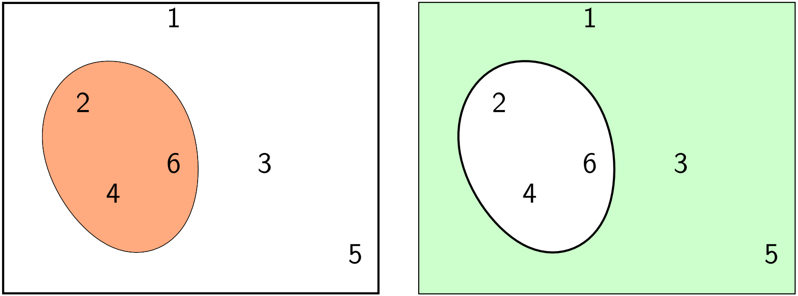


Pour calculer la probabilité d'un événement qui est sur plusieurs branches, on ajoute les probabilités des branches. Par ex. la probabilité de tirer une chemise de taille L est de $\frac{1}{4} \times 50\% + \frac{3}{4} \times 60\% = 0,575$.



Il est parfois utile de regarder, pour un événement E, l'ensemble des issues qui ne sont pas dans E. Cela s'appelle l'événement contraire de E (on dit aussi événement complémentaire), noté $\overline{E}$.

Avec le dé cubique $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A =$ "obtenir un nombre pair" $= \{2, 4, 6\}$ (à gauche), on a $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ (à droite).



Probabilité de l'événement contraire

Pour un événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

III/ Quelques propriétés

Deux événements qui n'ont aucune issue en commun sont deux événements qui sont dits incompatibles. Au contraire, deux événements qui ont au moins une issue en commun sont dits compatibles.

Les événements A et $\overline{A}$ sont donc deux événements incompatibles qui, pris ensemble, forment l'univers entier. Effectivement $A \cup \overline{A} = \{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$. Dans le cas général, si on a un ensemble d'événements qui sont incompatibles 2 à 2 et dont l'union fait Ω, on dit qu'on a un système exhaustif (on dit aussi que c'est une partition de l'univers, si aucun événement n'est vide).

Exemple : dans notre classe de 28 élèves de S4MAT6, je tire au hasard un élève. Les événements "tirer un élève de S4FRA", "tirer un élève de S4FRB", "tirer un élève de S4FRC" et "tirer un élève de S4FRD" forment un système exhaustif.

Quand on dessine un arbre de probabilités, on manipule des systèmes exhaustifs : les arcs qu'on fait partir désignent des événements incompatibles, et ils représentent toutes les issues.