Chapitre 8.
Trigonométrie dans le triangle rectangle

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2021–2022

Introduction

Ce chapitre vient essentiellement mettre des mots et des formules sur des notions vues précédemment :

- les rapports trigonométriques (sinus, cosinus et tangente)
- preuve des rapports grâce aux triangles semblables
- quelques propriétés trigonométriques

Pour certains exercices de ce chapitre, on aura aussi besoin de se souvenir du théorème de Pythagore.

Le théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en A. On a alors l'égalité suivante :

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$$

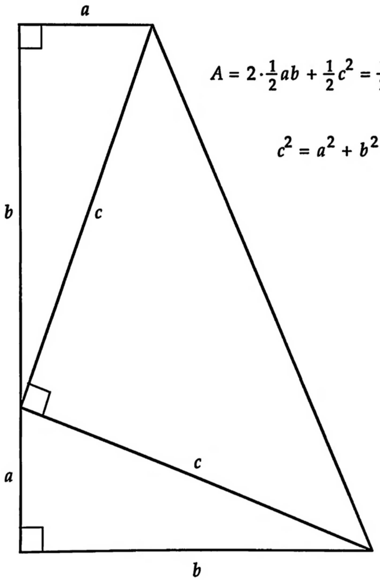
(le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés : si ABC est rectangle en A, l'hypoténuse est BC).

Démonstration(s) : Cf. diapositive suivante. D'autres démonstrations : `http://www.barsamian.am/2021-2022/S4P6/Chap2_Preuves_Pythagore.pdf` [1]

Pour trouver une longueur manquante dans un triangle rectangle, on commence par dire que le triangle est rectangle (et en quel point), puis on cite le théorème de Pythagore, et enfin on écrit l'égalité des carrés. Alors (et seulement alors) on calcule.

1. Source : R.B. Nelsen, "Proofs without words" (I, II et III).

0/ Le théorème de Pythagore et sa réciproque



$$A = 2\cdot\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

—James A. Garfield (1876)
20th President of the United States

Réciproque du théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle. Si on a l'égalité $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$, alors ce triangle est rectangle en A.

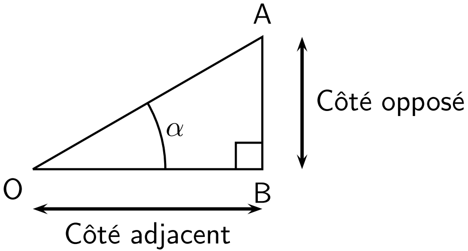
On peut donc cette fois, si on connaît les trois longueurs des côtés d'un triangle, savoir si ce triangle est rectangle ou non.

On commence donc par calculer le carré du plus grand côté, puis la somme des carrés des deux autres côtés, et s'il y a égalité on peut alors citer la réciproque du théorème de Pythagore, pour conclure que le triangle est rectangle.

Cosinus, Sinus et Tangente (SOHCAHTOA)

Soit ABC un triangle rectangle, et soit α un autre angle. Alors :

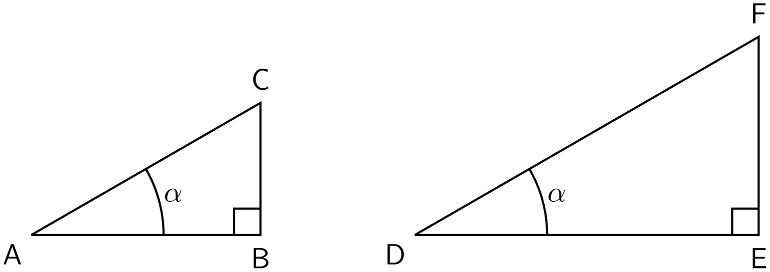
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}, \cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}.$$



Dans OAB rectangle en B, on a donc :

$$\sin(\alpha) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}} \; ; \; \cos(\alpha) = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \; ; \; \tan(\alpha) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}.$$

Soient ABC et DEF deux triangles rectangles (par ex. en B et en E) ayant un même angle α (par exemple $\alpha = \widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{EDF}}$).



Puisque les triangles ont deux angles égaux, ils sont semblables. Il existe donc un rapport d'agrandissement (ou de réduction) k entre ABC et DEF : $\mathrm{DE} = k \times \mathrm{AB}$, $\mathrm{DF} = k \times \mathrm{AC}$ et $\mathrm{EF} = k \times \mathrm{BC}$.

Ainsi $\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DF}} = \dfrac{k \times \mathrm{BC}}{k \times \mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$, donc le rapport est bien indépendant du triangle rectangle choisi.

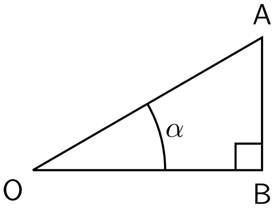
Remarques : puisque l'hypoténuse est le plus grand côté du triangle, on en déduit donc qu'on a toujours, pour α angle aigu (c'est-à-dire $0° \leq \alpha \leq 90°$) :

- $0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$
- $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$

Comme on fait la division de deux longueurs pour ces trois calculs, le sinus, le cosinus et la tangente sont des nombres sans unité.

En pratique, ces égalités permettent de retrouver une longueur quand on connaît une autre longueur et un angle, et on peut également retrouver l'angle quand on connaît deux longueurs.

1) Retrouver une longueur :



Dans OAB rectangle en B, on connaît $\alpha = 30°$, $\mathrm{AB} = 3$ cm. On peut donc retrouver les deux autres longueurs. Pour retrouver OA :

$$\sin(\alpha) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}$$

On remplace par les valeurs, et $\sin(30°) = 0,5$

$$0,5 = \frac{3}{\mathrm{OA}}$$

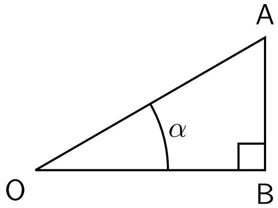
$\times \mathrm{OA}$

$$0,5 \times \mathrm{OA} = 3$$

$\div 0,5$

$$\mathrm{OA} = 6$$

2) Retrouver un angle :



Dans OAB rectangle en B, on connaît $\mathrm{AB} = 3$ cm et $\mathrm{OB} = 5$ cm.
On peut donc retrouver l'angle α :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}} \\ \tan(\alpha) &= \frac{3}{5} \\ \tan(\alpha) &= 0,6 \\ \alpha &\approx 31,0^\circ \end{aligned}$$

On remplace par les valeurs

On calcule

Calculatrice : *atan* ou tan^{-1} ou *arctan*