1 Paraboles

Ce chapitre étudie des fonctions de type $f(x) = ax^2 + bx + c$.

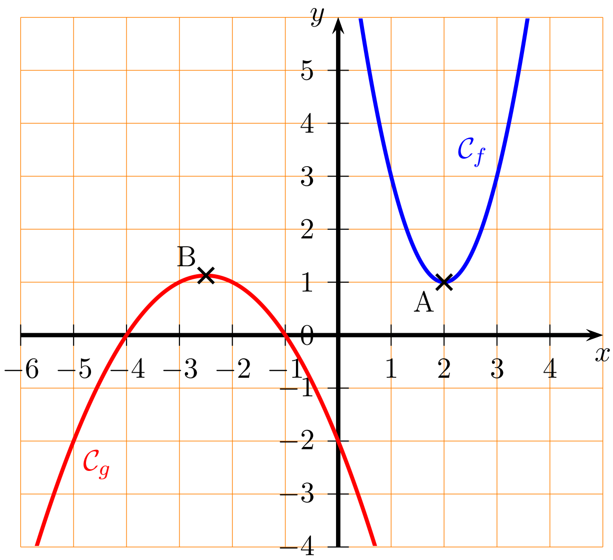
Une fonction de ce type est un polynôme du second degré (lorsque $a \neq 0$). L'écriture $ax^2 + bx + c$ est la forme développée de la fonction.

Le graphique d'une telle fonction est une parabole. C'est une courbe en "U" :

- à l'endroit (la parabole est tournée vers le haut) si $a > 0$
- ou à l'envers (elle est tournée vers le bas) si $a < 0$.

On appelle sommet de la parabole le point qui correspond à l'extremum de la fonction. Si la parabole est tournée vers le haut il s'agit d'un minimum, sinon d'un maximum.

Exemples :



$\mathcal{C}_f$ est tournée vers le haut, son sommet est A ; $\mathcal{C}_g$ est tournée vers le bas, son sommet est B.

Il existe deux autres formes pour la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- la forme canonique : $f(x) = a(x-p)^2 + q$ (qui existe toujours)
- la forme factorisée : $f(x) = a(x-r)(x-s)$ (qui n'existe pas toujours)

La forme canonique est liée au sommet de la parabole, qui a pour coordonnées $(p; q)$.

La forme factorisée est liée aux racines de f (les racines d'une fonction f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$), qui sont r et s (il est possible que $r = s$ si le sommet de la parabole est sur l'axe des abscisses). La forme factorisée n'existe donc que quand la fonction admet des racines.

Sommet

Pour une fonction polynomiale du second degré f :

1. si on connaît sa forme canonique $f(x) = a(x-p)^2 + q$, le sommet a pour coordonnées $(p; q)$.
2. si on connaît sa forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$, le sommet a pour abscisse $p = \dfrac{-b}{2a}$, et pour ordonnée $q = f(p)$.

Remarque : si on connaît sa forme développée $f(x) = a(x-r)(x-s)$, le sommet a pour abscisse $p = \dfrac{r+s}{2}$ (le sommet est au milieu des deux racines, par symétrie), et pour ordonnée $q = f(p)$.

Toute parabole a un axe de symétrie qui est une droite verticale passant par son sommet. Une fois qu'on a l'abscisse p du sommet, l'équation de l'axe de symétrie est $x = p$.

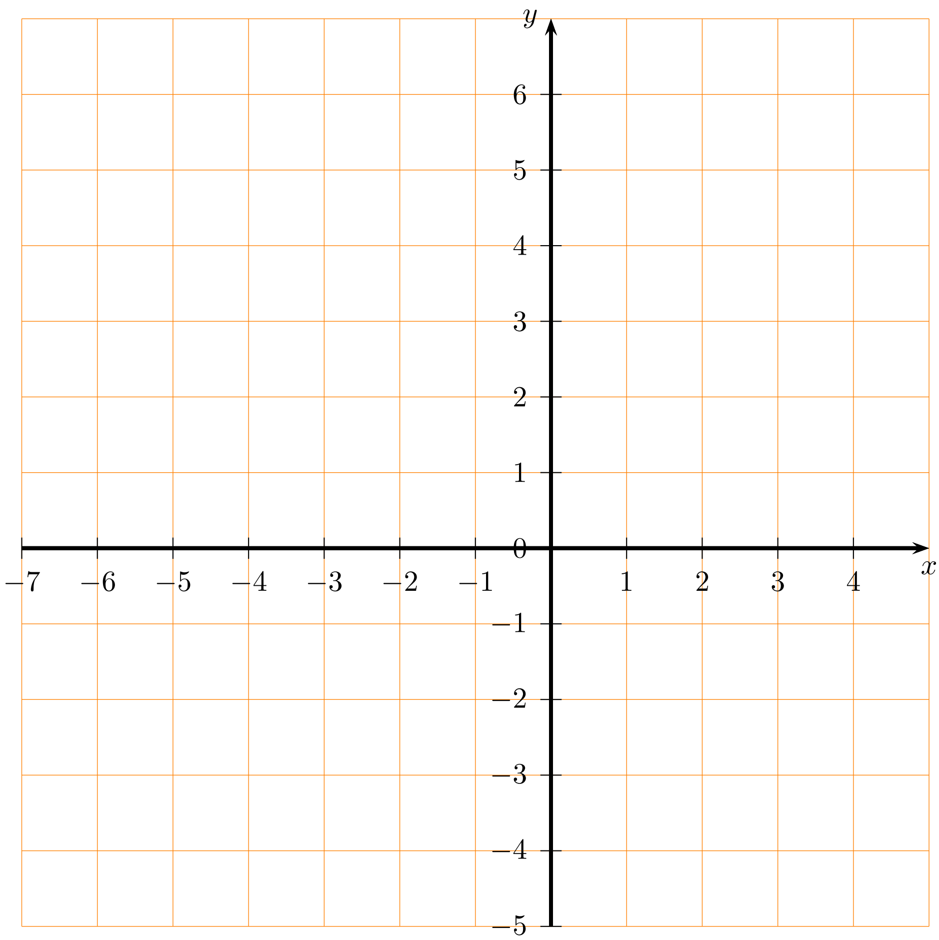
À faire : tracer sur le graphique suivant, les paraboles correspondant aux trois fonctions suivantes. Indication : commencer par chercher le sommet de la parabole, puis calculer une petite dizaine de points pour chaque courbe pour des valeurs de x autour de l'abscisse du sommet :

- $f(x) = x^2 + x + 1$
- $g(x) = x^2 + 3x$
- $h(x) = -2x^2 - 5x + 2$

x										
$f(x)$										

x										
$g(x)$										

x										
$h(x)$										



Pour trouver les racines d'une telle fonction f, il faut donc savoir résoudre l'équation $f(x) = 0$:

- si on connaît la forme factorisée $f(x) = a(x-r)(x-s)$ il n'y a rien à faire ! Les racines sont r et s (un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, donc $f(x) = 0$ donne bien $a = 0$ (ce qui est faux) ou $x - r = 0$ ou $x - s = 0$, donc on a deux solutions $\mathcal{S} = \{r, s\}$.
- si on connaît la forme canonique $f(x) = a(x-p)^2 + q$, on peut résoudre à la main. Le cas le plus simple est lorsque $p = 0$.
  S'entraîner à résoudre par ex. $5x^2 - 10 = 0$, $2x^2 + 4 = 0$, $x^2 - 1 = 0$.
- si on connaît la forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, il faudra appliquer la méthode du discriminant (Δ), qu'on verra après le test B.

2 Identités remarquables et triangle de Pascal

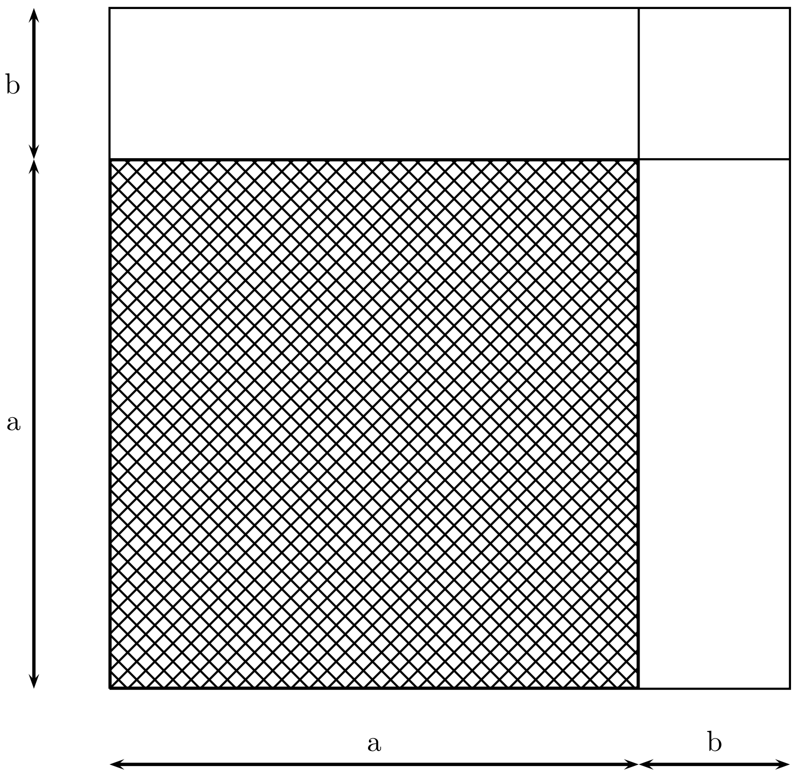
L'an dernier on a révisé les identités remarquables suivantes. Vous n'avez plus le droit de vous tromper sur ces formules !

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Il y a en fait des formules pour n'importe quelle puissance. Au programme, on a les formules pour $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$:

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

On peut prouver géométriquement la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Dans le dessin suivant, l'aire du grand carré est bien sûr $(a+b)^2$. C'est aussi l'aire du carré hachuré a^2 plus l'aire du petit carré b^2 plus l'aire des deux rectangles $2ab$. Et voilà !



On peut de même prouver géométriquement l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, en considérant un cube de côté $a+b$ dans lequel on met contre un coin un plus petit cube de côté a.

Mais on va voir une méthode qui permet de trouver n'importe quelle identité remarquable, à n'importe quelle puissance. C'est le triangle de Pascal. L'idée géniale de Blaise Pascal (en 1655, et de plein d'autres gens avant lui en fait, on a retrouvé des manuscrits avec la même idée en Inde en 755, en Chine en 1303), c'est qu'on peut déduire l'écriture développée de $(a+b)^3$ à partir de l'écriture développée de $(a+b)^2$, on peut déduire l'écriture développée de $(a+b)^4$ à partir de l'écriture développée de $(a+b)^3$, etc.

Effectivement, $(a+b)^3$ peut se calculer comme $(a+b)^2 \times (a+b)$. Cela donne :

$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \times (a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Le coefficient devant ab^2, par exemple (c'est 3), provient de $2ab \times b$ et de $b^2 \times a$. Du coup, c'est $2+1=3$. Si on note les termes de la forme développée de $(a+b)^4$ dans le même ordre (donc, d'abord a^4, puis a^3b, puis a^2b^2, puis ab^3, puis b^4, on ferait de même, etc. Au final, les coefficients qu'on va écrire vont former ce qu'on appelle le triangle de Pascal :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & \backslash & / & & & & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Cela se lit de la sorte :

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = 1 \times a + 1 \times b$
- $(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$
- $(a+b)^3 = 1 \times a^3 + 3 \times a^2b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3$
- $(a+b)^4 = 1 \times a^4 + 4 \times a^3b + 6 \times a^2b^2 + 4 \times ab^3 + 1 \times b^4$

Pour recalculer le triangle de Pascal, on démarre par un triangle dont on met des 1 sur le côté gauche et le côté droit. Ensuite, à chaque ligne, pour obtenir un nombre, on fait la somme des deux chiffres juste au-dessus. D'où les deux traits par exemple de 1 et 3 vers 4, qui montrent que le 4 vient de $1 + 3$.

On doit pouvoir être capable d'utiliser le triangle de Pascal pour trouver le développement du polynôme $(1+x)^n$. Par exemple pour $n = 5$, on trouve :

$$(x+1)^5 = 1 \times x^5 + 5 \times x^4 1 + 10 \times x^3 1^2 + 10 \times x^2 1^3 + 5 \times x 1^4 + 1 \times 1^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

3 Divers calculs

Enfin, comme l'an dernier, on doit pouvoir faire des calculs avec des fonctions polynomiales : images d'un nombre, addition, multiplication d'expressions...

On doit aussi pouvoir être capable de résoudre des équations simples, de type $ax^n + b = 0$ (cela donne $x^n = \dfrac{-b}{a}$, on prend alors la racine $n$ème quand c'est possible), ou de type $ax^2 + bx = 0$ (factoriser par x ce qui donne $x(ax+b) = 0$ et on a donc $x = 0$ ou bien $x = \dfrac{-b}{a}$).