Exercice 1

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer si c'est une fonction polynôme de degré 2.

1. $f(x) = x^2 + 2x - \sqrt{2}$
2. $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} - 1$
3. $h(x) = 2x + 1$

Une fonction polynomiale est une fonction qui peut s'écrire comme la somme de puissances entières et positives de x (multipliées éventuellement par des nombres). Par exemple $f(x) = x^6 + 3x^4 + x + 2$.

Une fonction polynomiale est de degré 2 si on peut l'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. C'est-à-dire que la plus grande puissance de x présente est la puissance 2.

1. f est une fonction polynomiale de degré 2, avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -\sqrt{2}$.
2. g n'est pas une fonction polynomiale de degré 2, car on a un terme qui vaut $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$, et il n'est pas possible d'avoir une puissance négative dans un polynôme.
3. h est bien une fonction polynomiale, mais son degré n'est pas 2, c'est 1 (car la plus grande puissance de x, c'est $x = x^1$).

Exercice 2

Pour chaque fonction ci-dessous, développer et réduire, puis indiquer les fonctions polynômes de degré 2, en précisant ses coefficients (a, b et c).

1. $f(x) = 2(x + 1)^2$
2. $g(x) = (x + 1)(x - 1)$
3. $h(x) = (x + 1) - (x - 1)^2$
4. $i(x) = 2(x + 2)^2 - 3(x + 1)$
5. $j(x) = (x + 1)^3 - x^3$
6. $k(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} \times (x^2 + x)$

On rappelle les identités remarquables :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

1. $f(x) = 2 \times (x + 1)^2 = 2 \times (x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 4x + 2$.
2. $g(x) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$.
3. $h(x) = x + 1 - (x^2 - 2x + 1) = x + 1 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 3x$.
4. $i(x) = 2(x^2 + 4x + 4) - (3x - 3) = 2x^2 + 8x + 8 - 3x + 3 = 2x^2 + 5x + 11$.
5. Pour $j(x)$, on verra plus tard la formule pour $(a + b)^3$ et on verra aussi comment se servir du triangle de Pascal pour retrouver la formule. Aujourd'hui, pour développer le cube, on pouvait écrire :
   $j(x) = (x+1) \times (x+1)^2 - x^3 = (x+1) \times (x^2+2x+1) - x^3 = x^3+2x^2+x+x^2+2x+1-x^3 = 3x^2 + 3x + 1$.
6. $k(x) = x^2 + \dfrac{1}{x} \times (x^2 + x) = x^2 + \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{x}{x} = x^2 + x + 1$.

Exercice 5

Dire pour chaque fonction si elle admet un minimum ou un maximum et en quelle valeur il est atteint (sans Geogebra, puis contrôler avec l'outil Extremum de Geogebra).

1. $f(x) = 3x^2 + 4$
2. $g(x) = -2(x-4)^2 + 8$
3. $h(x) = -2x^2 + 8x - 1$
4. $i(x) = 7(x+1)^2 - 25$

Une fonction polynomiale du second degré $ax^2 + bx + c$ est tournée vers le haut quand $a > 0$ (dans ce cas, son sommet correspond à un minimum) et elle est tournée vers le bas quand $a < 0$ (dans ce cas, son sommet correspond à un maximum).

Dans les deux cas, l'extremum (le minimum ou le maximum) est atteint en $\dfrac{-b}{2a}$. Cela veut donc dire que l'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = \dfrac{-b}{2a}$.

1. Ici c'est $a = 3$, $b = 0$ et $c = 4$. Donc la parabole est tournée vers le haut, elle a un minimum, qui est atteint en $\dfrac{-0}{2 \times 3} = 0$ (donc l'axe de symétrie a pour équation $x = 0$, c'est l'axe des ordonnées).
2. Méthode vue en activité d'introduction jeudi : ici on reconnaît la forme canonique de la fonction du second degré : $a(x-p)^2 + q$ avec $a = -2$, $p = 4$ et $q = 8$. Cela veut dire que le sommet est en $(4; 8)$. Puisque $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas, et le sommet correspond à un maximum, atteint en 4.

   Sinon, mais c'est beaucoup plus long, on peut développer $-2(x-4)^2 + 8 = -2(x^2 - 8x + 16) + 8 = -2x^2 + 16x - 32 + 8 = -2x^2 + 16x - 24$. Donc $a = -2$, $b = 16$ et $c = 8$, ainsi la parabole est tournée vers le bas, elle a un maximum, qui est atteint en $\dfrac{-16}{2 \times (-2)} = \dfrac{-16}{-4} = 4$ (l'axe de symétrie a pour équation $x = 4$).
3. Ici c'est $a = -2$, $b = 8$ et $c = -1$. Donc la parabole est tournée vers le bas, elle a un maximum, qui est atteint en $\dfrac{-8}{2 \times (-2)} = \dfrac{-8}{-4} = 2$ (donc l'axe de symétrie a pour équation $x = 2$).
4. Méthode vue en activité d'introduction jeudi : ici on reconnaît la forme canonique de la fonction du second degré : $a(x-p)^2 + q$ avec $a = 7$, $p = -1$ et $q = -25$. Cela veut dire que le sommet est en $(-1; -25)$. Puisque $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut, et le sommet correspond à un minimum, atteint en -1.

   Sinon, mais c'est beaucoup plus long, on peut aussi développer.

Exercice 6 — Geogebra, outils Min et Max sur un intervalle

Une personne s'est pesée toutes les semaines pendant un an en 2018. Sa courbe de poids peut être modélisée par une fonction polynôme de degré 2 dont l'expression est $f(x) = 0,008x^2 - 0,4x + 75$ où x correspond au temps en semaines à partir du premier janvier 2018. $x \in [0; 52]$.

1. Quel était son poids maximal sur l'année ? Quand a-t-il été atteint ?
2. Quel était son poids minimal sur l'année ? Quand a-t-il été atteint ?

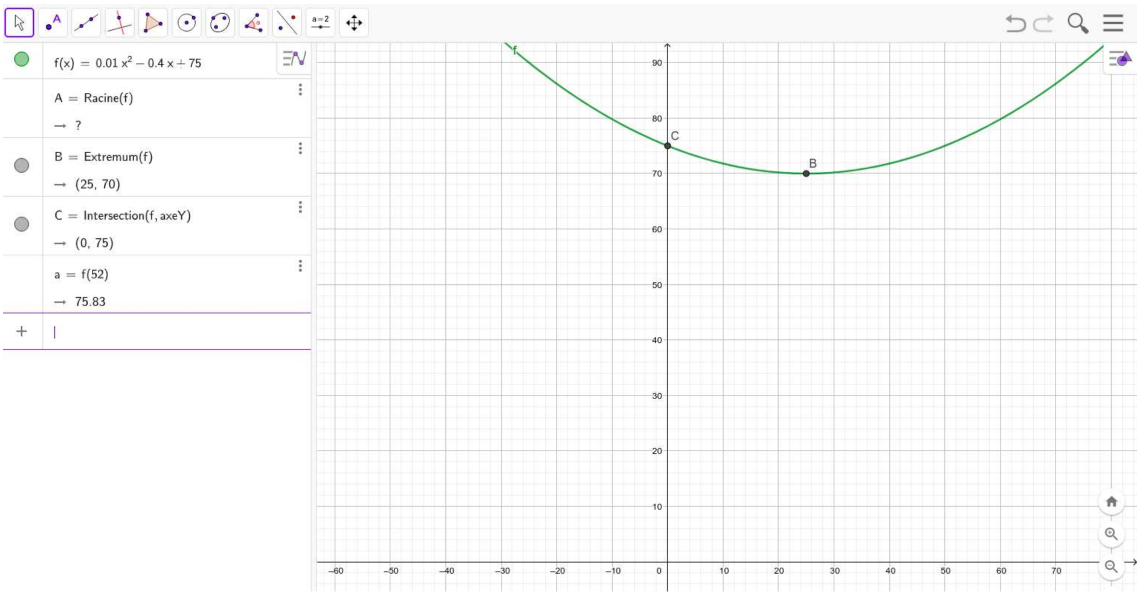
On trace la fonction dans Geogebra en tapant directement $f(x) = 0,008x^2 - 0,4x + 75$. Geogebra, de base, est configuré pour arrondir à 2 décimales. Donc il va sûrement afficher $0.01x^2 - 0.4x + 75$, mais c'est normal ! Il a arrondi $0.008 \approx 0.01$.

Là, on ne voit pas la courbe de la fonction. C'est normal ! Si on fait un clic sur les trois petits points, à droite de l'expression de la fonction, dans Geogebra, on clique sur “Points spéciaux” et on voit apparaître :

```
A = Racine(f)
 -> ?
B = Extremum(f)
 -> (25, 70)
C = Intersection(f, axeY)
 -> (0, 75)
```

Cela veut dire qu'on ne voit pas la fonction parce qu'on est trop bas ! Effectivement, les points qui sont donnés par Geogebra sont $(0;75)$ et $(25;70)$, qui sont beaucoup plus haut. Il faut donc remonter l'axe (ou dézoomer).

1. On voit que la parabole est tournée vers le haut, donc entre 0 et 52, le poids descend jusqu'à son minimum, puis remonte. Donc la plus grande valeur est soit en $t = 0$, soit en $t = 52$. Geogebra nous a déjà donné $f(0) = 75$ (c'est le point C), il faut maintenant demander $f(52) = 75.83$. Donc le poids maximal est de $75,83$ kg, atteint à $t = 52$, à la fin de l'année 2018.
2. Le sommet B$(25;70)$ correspond à un minimum. Ainsi le poids minimal est de 70 kg, et c'est atteint pour $t = 25$ donc la 25ème semaine de 2018 (en juillet, pour être en forme pour la plage !).



Exercice 10

> Pour chaque trinôme ci-dessous, calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
>
> a) $x^2 + 4x + 5$
> b) $2x^2 - x - 6$
> c) $-2x^2 - 4x - 7$
> d) $-x^2 + 2x + 3$

Dans toutes les questions de cet exercice, on identifie le trinôme à $ax^2 + bx + c$ (c'est-à-dire, on commence par déterminer les valeurs de a, b et c).

a) On identifie $a = 1; b = 4; c = 5$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = \boxed{-4}$.

b) On identifie $a = 2; b = -1; c = -6$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = \boxed{49}$

c) On identifie $a = -2; b = -4; c = -7$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times (-7) = 16 - 56 = \boxed{-40}$

d) On identifie $a = -1; b = 2; c = 3$, donc $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = \boxed{16}$

Exercice 11

> Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
>
> a) $3x^2 - 9x - 12 = 0$ b) $2x^2 + 5x + 7 = 0$ c) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$

Pour cet exercice, on se réfère à la méthode de résolution de l'organigramme :
http://www.barsamian.am/2021-2022/S5P4/Chap3_Flowchart.pdf

a) On identifie $a = 3; b = -9; c = -12$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 81 + 144 = 225$.
Comme $\Delta > 0$, on a deux solutions $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
La première solution est $x1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 15}{2 \times 3} = \frac{24}{6} = 4$
La seconde solution est $x2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 15}{2 \times 3} = \frac{-6}{6} = -1$
Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 4\}}$.

b) On identifie $a = 2; b = 5; c = 7$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times 7 = 25 - 56 = -31$
Comme $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.
Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{\ \}}$ (on peut aussi écrire $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$, mais Geogebra écrit $\{\ \}$ dans ce cas).

c) On identifie $a = 2; b = -2; c = \frac{1}{2}$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4 - 4 = 0$
Comme $\Delta = 0$, il y a une seule solution.
La solution est $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$
Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$.

Exercice 12

> Déterminer toutes les solutions réelles des équations suivantes :
>
> a) $3x^2 - 5x = -25$ b) $4x^2 - 2x - 7 = 4$

Pour résoudre ces équations, il faut commencer par tout mettre du même côté, pour faire apparaître une équation de type $ax^2 + bx + c$.

1. Pour $3x^2 - 5x = -25$, on commence par ajouter 25 de chaque côté, on obtient :
$$3x^2 - 5x + 25 = 0$$
On identifie $a = 3; b = -5; c = 25$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 25 = 25 - 300 = -275$.
Comme $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.
Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{\ \}}$ (on peut aussi écrire $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$, mais Geogebra écrit $\{\ \}$ dans ce cas).
2. Pour $4x^2 - 2x - 7 = 4$, on commence par retrancher 4 de chaque côté, on obtient :
$$4x^2 - 2x - 11 = 0$$
On identifie $a = 4; b = -2; c = -11$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 4 \times (-11) = 4 + 176 = 180$.

Comme $\Delta > 0$, on a deux solutions $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
La première solution est $x1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+\sqrt{180}}{2\times 4} = \dfrac{2+\sqrt{180}}{8} \approx 1,93$ (il est possible de simplifier l'expression exacte, cela donne $\dfrac{1+\sqrt{45}}{4}$ car $180 = 4 \times 45$ donc $\sqrt{180} = \sqrt{4}\sqrt{45} = 2\sqrt{45}$ et on simplifie ensuite en haut et en bas par 2).
La seconde solution est $x2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-\sqrt{180}}{2\times 4} = \dfrac{2-\sqrt{180}}{8} \approx -1,43$ (il est possible de simplifier l'expression exacte, de la même manière on trouve $\dfrac{1-\sqrt{45}}{4}$).
Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1-\sqrt{45}}{4}; \dfrac{1+\sqrt{45}}{4}\right\}}$.

Exercice 15

Un artisan fabrique des boîtes à bijoux en bois. Il peut en fabriquer jusqu'à 150 par mois. On suppose que toute la production est vendue, et chaque boîte est vendue 50 €. Le coût de fabrication en euros de x boîtes est donné par la fonction $f(x) = 0,23x^2 + 4x + 300$.

1. Quel est le coût de fabrication de 20 boîtes ?
2. On note $R(x)$ la recette, en euros, engendrée par la vente de x boîtes. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
3. Montrer que le bénéfice, en euros, engendrée par la vente de x boîtes est donné par la fonction B définie sur $[0; 150]$ par $B(x) = -0,23x^2 + 46x - 300$.
4. Quel est le bénéfice réalisé pour la vente de 20 boîtes ?
5. Étudier les variations de B sur $[0; 150]$.
6. En déduire le bénéfice maximal de l'artisan. Pour combien de boîtes est-il obtenu ?
7. Déterminer, lorsque c'est possible, le nombre de boîtes à produire et vendre pour obtenir un bénéfice de :

   a) 1 425 € b) 3 000 €

8. Combien de boîtes l'artisan doit-il fabriquer et vendre pour être rentable ?

1. $f(x)$ représente le coût de fabrication de x boîtes, en euros. Pour 20 boîtes, en euros, on calcule $f(20)$, donc on remplace x par 20 :
   $f(20) = 0,23 \times 20^2 + 4 \times 20 + 300 = \boxed{472}$.
2. Chaque boîte est vendue 50 €, ainsi par proportionnalité, si on vend x boîtes, la recette est de $50x$ €. Donc $\boxed{R(x) = 50x}$.
3. Le bénéfice se calcule comme les recettes moins les coûts. Donc ici, en euros :
   $B(x) = R(x) - f(x) = 50x - (0,23x^2 + 4x + 300) = 50x - 0,23x^2 - 4x - 300 = -0,23x^2 + 46x - 300$.
4. $B(x)$ représente le bénéfice réalise pour la fabrication et la vente de x boîtes, en euros. Pour 20 boîtes, en euros, on calcule $B(20)$, donc on remplace x par 20 :
   $B(20) = -0,23 \times 20^2 + 46 \times 20 - 300 = \boxed{408}$.
5. La fonction B est une fonction polynomiale du second degré. Puisque $a = -0,23$ est négatif, elle est tournée vers le bas : elle est <u>croissante</u> jusqu'au sommet, puis <u>décroissante</u> ensuite.
   L'abscisse du sommet se calcule par la formule $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{46}{2 \times (-0,23)} = 100$. Du coup :

$\boxed{B \text{ est croissante sur }]-\infty;100]}$ puis $\boxed{B \text{ est décroissante sur } [100;+\infty[}$. On peut consigner ces informations dans un tableau de variations (une flèche qui monte quand c'est croissant, une flèche qui descend quand c'est décroissant ; la ligne des x montre les valeurs où le sens de variations (croissant, décroissant) change).

x	$-\infty$		100		$+\infty$
Var $f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

6. Du coup, le bénéfice maximal de l'artisan, c'est quand la fonction B est maximale, donc pour $x = 100$ (donc pour $\boxed{\text{100 boîtes}}$). Ce bénéfice se calcule, en euros, par $B(100) = -0,23 \times 100^2 + 46 \times 100 - 300 = \boxed{2000}$.
7. (a) Obtenir un bénéfice de 1 425 €, c'est résoudre l'équation $B(x) = 1\ 425$:
   $-0,23x^2 + 46x - 300 = 1\ 425$. On fait comme à l'exercice 12, on commence par tout mettre du même côté, pour faire apparaître une équation de type $ax^2 + bx + c$. Ici on soustrait 1425 de chaque côté, on obtient :

   $$-0,23x^2 + 46x - 1725 = 0$$

   On identifie $a = -0,23; b = 46; c = -1725$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = 46^2 - 4 \times (-0,23) \times (-1725) = 529$.

   Comme $\Delta > 0$, on a deux solutions $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

   La première solution est $x1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-46+\sqrt{529}}{2 \times (-0,23)} = \dfrac{-46+23}{-0,46} = 50$.

   La seconde solution est $x2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-46-\sqrt{529}}{2 \times (-0,23)} = \dfrac{-46-23}{-0,46} = 150$.

   Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{50;150\}}$.

   Donc pour obtenir un bénéfice de 1 425 €, on peut vendre $\boxed{\text{50 boîtes ou 150 boîtes}}$.

   Avec Geogebra : on aurait simplement tapé `Solutions(B(x) = 1425)`.

   (b) On a vu que le bénéfice maximal était de 2 000 €, donc on n'a même pas besoin de résoudre l'équation pour 3 000 €, on sait que $\boxed{\text{c'est impossible}}$.

   On pouvait bien sûr résoudre $-0,23x^2 + 46x - 300 = 3\ 000$, soustraire 3000 de chaque côté et se rendre compte que le discriminant Δ était strictement négatif.

   Avec Geogebra : on aurait simplement tapé `Solutions(B(x) = 3000)`.
8. Pour être rentable, cela veut dire que le bénéfice de l'artisan doit être positif. Il faut donc résoudre $B(x) \geq 0$. Vu la courbe de la fonction B (c'est une fonction du second degré), on peut commencer par résoudre $B(x) = 0$ (cela va donner 2 solutions), et on voit, vu la courbe, que les valeurs pour lesquelles $B(x) \geq 0$ sont toutes les valeurs entre ces deux solutions.

   $$-0,23x^2 + 46x - 300 = 0$$

   On identifie $a = -0,23; b = 46; c = -300$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = 46^2 - 4 \times (-0,23) \times (-300) = 1840$.

   Comme $\Delta > 0$, on a deux solutions $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

   La première solution est $x1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-46+\sqrt{1840}}{2 \times (-0,23)} \approx 6,7$.

   La seconde solution est $x2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-46-\sqrt{1840}}{2 \times (-0,23)} \approx 193,3$.

Bien sûr on ne peut pas vendre un nombre non entier de boîtes, donc pour être rentable (obtenir un bénéfice ≥ 0), on peut vendre $\boxed{\text{entre 7 boîtes et 193 boîtes}}$.

Avec Geogebra : on aurait simplement tapé `Solutions(B(x) >= 0)` (et on aurait bien sûr converti l'intervalle donné dans les valeurs entières !)