Chapitre 4.
Angles : le radian

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2021–2022

Plan du chapitre

- Le cercle trigonométrique
- Les rapports trigonométriques

Introduction : plusieurs mesures pour un même angle

Vidéo : historique des degrés, définition du radian :

https://www.youtube.com/watch?v=2-uyOoWrRs4

- L'angle plein (le cercle complet) vaut 360°.
- Le périmètre d'un cercle, c'est $2\pi R$
- Si on considère un angle, alors sa mesure en radians, c'est la longueur de l'arc de cercle divisé par le rayon du cercle.
- <u>Remarque importante :</u> si le rayon du cercle est 1, alors il s'agit du cercle trigonométrique... et la mesure de l'angle en radians, c'est directement la longueur de l'arc de cercle.

I/ Le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1. Son périmètre est 2π (formule : périmètre $= 2\pi R$).

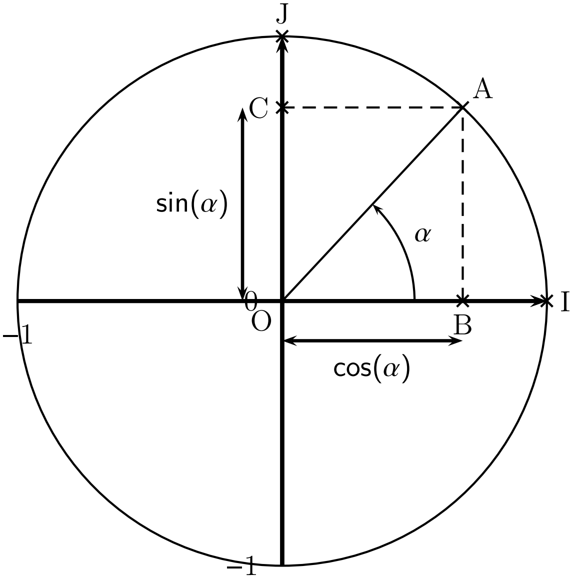
Pour se repérer sur le cercle, on définit un départ en $I(1;0)$ et on tourne dans le sens trigonométrique (le sens opposé des aiguilles d'une montre). On compte alors la longueur de l'arc de cercle parcouru. Remarque : on peut donc ajouter ou retrancher autant de fois que voulu la valeur 2π, ça ne change rien au repérage !

Si on nomme M le point sur lequel on s'arrête, on définit la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en radians comme étant la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$. On a donc le tableau de proportionnalité [1] :

Degrés	0	360	30	45	60	90	180
Radians	0	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

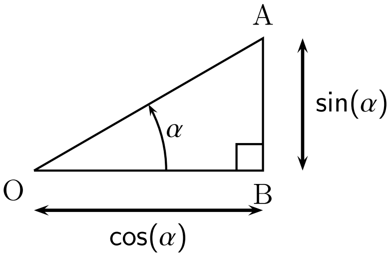
1. Degrés/radians : https://www.youtube.com/watch?v=-fu9bSBKM00

II/ Trigonométrie dans le premier quart de cercle



- Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.
- Soit A $\in \mathcal{C}$ tel que $\overset{\frown}{\mathrm{IA}} = \alpha$
- Soit B $\in$ (OI) tel que (AB) // (OJ)
- Dans OAB rectangle en B, on a OA $= 1$, donc $\cos(\alpha) = \mathrm{OB}$
- Soit C $\in$ (OJ) tel que (AC) // (OI)
- Dans OAC rectangle en C, on a OA $= 1$, donc $\sin(\alpha) = \mathrm{OC}$

Première formule à retenir



Dans OAB rectangle en B, avec $\mathrm{OA} = 1$ et $\alpha = \widehat{\mathrm{BOA}}$:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Effectivement, cela provient tout simplement du théorème de Pythagore et de la définition des relations trigonométriques :

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \mathrm{OB}\,;\ \sin(\alpha) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}} = \mathrm{AB}\,;\ \mathrm{OB}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2.$$

Les valeurs bleues se lisent directement sur le quart de cercle, les valeurs rouges se déduisent [2] de la relation $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$. Pour la valeur en $45° = \dfrac{\pi}{4}$ radians, la valeur vient du fait que le triangle est isocèle en plus d'être rectangle [3].

Degrés	0	30	45	60	90
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

2. Pour $\frac{\pi}{3}$: https://www.youtube.com/watch?v=4R1i5Vj72Ls
3. Pour $\frac{\pi}{4}$: https://www.youtube.com/watch?v=b2-EQupZUp8