Chapitre 7.
Probabilités

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2021–2022

Plan du chapitre

- Rappels de S4
- Axiomatique des probabilités
- Probabilités conditionnelles

> *“Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la loi des grands nombres. Elle consiste en ce que, si l'on observe des nombres très considérables d'événements d'une même nature, dépendant de causes constantes et de causes qui varient irrégulièrement, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, c'est-à-dire sans que leur variation soit progressive dans aucun sens déterminé, on trouvera, entre ces nombres, des rapports à très peu près constants. Pour chaque nature de choses, ces rapports auront une valeur spéciale dont ils s'écarteront de moins en moins, à mesure que la série des événements observés augmentera davantage, et qu'ils atteindraient rigoureusement s'il était possible de prolonger cette série à l'infini.*
>
> *S.D. Poisson, “Recherches sur la probabilité des jugements” (1838), Préambule (page 7)”*

> *Es sei E eine Menge von Elementen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, welche man elementare Ereignisse nennt, und $\mathfrak{F}$ eine Menge von Teilmengen aus E; die Elemente der Menge $\mathfrak{F}$ werden weiter zufällige Ereignisse genannt.*
>
> *I. $\mathfrak{F}$ ist ein Mengenkörper.*
> *II. $\mathfrak{F}$ enthält die Menge E.*
> *III. Jeder Menge A aus $\mathfrak{F}$ ist eine nichtegative reelle Zahl $P(A)$ zugeordnet. Diese Zahl $P(A)$ nennt man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.*
> *IV. $P(E) = 1$.*
> *V. Wenn A und B disjunkt sind, so gilt*
>
> $$P(A + B) = P(A) + P(B).$$
>
> *A. Kolmogoroff, "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1933), Chapitre I (Axiome)*

Une expérience aléatoire est composée de différentes issues (on dit aussi événements élémentaires). On note souvent Ω l'ensemble des issues, et on l'appelle univers.

Par exemple si l'expérience aléatoire consiste à lancer un dé cubique où les faces sont numérotées de 1 à 6, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Un événement est un sous-ensemble de Ω.

Dans l'exemple précédent, l'événement $A =$ "obtenir un nombre pair" est l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

Remarque : les événements sont toujours rapportés à une expérience donnée, ainsi obtenir un nombre pair ici n'a que 3 issues possibles, cela serait différent dans une autre expérience aléatoire (si on jouait à la roulette, par exemple, qui contient les nombres de 0 à 36).

I/ Notations et axiomes

On a les notations suivantes si A et B sont deux événements :

- $A \cup B$ représente l'événement réunion de A et de B, c'est-à-dire qui contient les issues de A avec celles de B.
  Un ensemble ne contient qu'au plus une seule fois un élément, donc les éléments en commun ne sont pas deux fois dans la réunion !
  Exemple : $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$ donc $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- $A \cap B$ représente l'événement intersection de A et de B, c'est-à-dire qui contient les issues de A qui sont aussi dans B.
  Exemple : $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$ donc $A \cap B = \{2\}$.
- $\overline{A}$ est l'événement contraire de A. Il contient les issues de Ω qui ne sont pas dans A.
  Exemple : $A = \{2, 4, 6\}$ donc $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

On définit alors une fonction P sur l'ensemble des événements. Pour que P soit une loi de probabilité, il faut que :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$ pour tout $A \subset \Omega$ (pour tout événement A)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour tous $A \subset \Omega, B \subset \Omega$ tels que $A \cap B = \emptyset$ (pour tous événements A et B disjoints — on dit aussi incompatibles)

Probabilité de l'événement contraire

Pour un événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration : par définition de l'événement contraire, A et $\overline{A}$ sont incompatibles et leur réunion est Ω. Donc, grâce aux axiomes, il vient que :
$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ mais $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$, d'où il vient que $1 = P(A) + P(\overline{A})$, d'où le résultat.

Probabilité de l'union

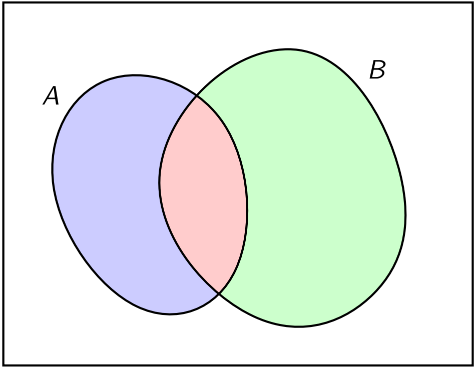
Pour tous événements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration : on décompose l'événement A en deux événements disjoints dont la réunion fait A (c'est une partition de A) : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.
De même pour B : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$. Donc $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.
Or, cette décomposition nous donne une partition de $A \cup B$ en trois événements disjoints deux à deux $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$. Donc $P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$ ce qui donne le résultat en utilisant les deux premières décompositions de $P(A)$ et de $P(B)$.

Probabilité de l'union

Pour tous événements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Explication sur un dessin :



$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

D'où il vient que $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$, d'où le résultat.

II/ Les probabilités conditionnelles : 1) Définition

Dans une expérience aléatoire, soient deux événements A et B. Si lors du résultat, on sait que A s'est produit, alors on a gagné de l'information pour calculer la probabilité de l'événement B : c'est la probabilité conditionnelle de B sachant A, qui se note $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$).

Dans une expérience aléatoire, soient deux événements A et B. Si lors du résultat, on sait que A s'est produit, alors on a gagné de l'information pour calculer la probabilité de l'événement B : c'est la probabilité conditionnelle de B sachant A, qui se note $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$).

Exemple : je tire un élève au hasard parmi ceux du secondaire à l'EEB1. $A =$ "être en S5 francophone" et $B =$ "avoir M. Barsamian en professeur". Alors $P(B) \approx 0,05$ et $P_A(B) \approx 0,2$.

II/ Les probabilités conditionnelles : 1) Définition

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B, avec $P(A) \neq 0$. Alors on définit la probabilité conditionnelle de B sachant A par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B, avec $P(A) \neq 0$. Alors on définit la probabilité conditionnelle de B sachant A par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque : cela revient à calculer la probabilité de B en se plaçant non plus dans l'univers Ω mais dans l'univers A. Autrement dit...

P_A est une loi de probabilité

Si A est un événement de probabilité non nulle, la fonction P_A définit une loi de probabilité sur l'univers A.

II/ Les probabilités conditionnelles : 1) Définition

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B, avec $P(A) \neq 0$. Alors on définit la probabilité conditionnelle de B sachant A par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque : cela revient à calculer la probabilité de B en se plaçant non plus dans l'univers Ω mais dans l'univers A. Autrement dit...

P_A est une loi de probabilité

Si A est un événement de probabilité non nulle, la fonction P_A définit une loi de probabilité sur l'univers A.

Remarque : cette définition permet de calculer la probabilité de l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Exemple tiré du film “Le maître d’école” (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui			120
Non		22	
Total	200		252

$P(Elle) =$

$P(Elle \cap PM) =$

$P_{Elle}(PM) =$

Exemple tiré du film "Le maître d'école" (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	90	30	120
Non	110	22	132
Total	200	52	252

$P(Elle) =$

$P(Elle \cap PM) =$

$P_{Elle}(PM) =$

Exemple tiré du film "Le maître d'école" (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	90	30	120
Non	110	22	132
Total	200	52	252

$P(Elle) = \dfrac{120}{252}$

$P(Elle \cap PM) =$

$P_{Elle}(PM) =$

Exemple tiré du film “Le maître d’école” (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	90	30	120
Non	110	22	132
Total	200	52	252

$P(Elle) = \frac{120}{252}$

$P(Elle \cap PM) = \frac{90}{252}$

$P_{Elle}(PM) =$

Exemple tiré du film “Le maître d’école” (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	90	30	120
Non	110	22	132
Total	200	52	252

$$P(Elle) = \frac{120}{252}$$

$$P(Elle \cap PM) = \frac{90}{252}$$

$$P_{Elle}(PM) = \frac{P(Elle \cap PM)}{P(Elle)} =$$

Exemple tiré du film "Le maître d'école" (avec Coluche) :

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	90	30	120
Non	110	22	132
Total	200	52	252

$$P(Elle) = \frac{120}{252}$$

$$P(Elle \cap PM) = \frac{90}{252}$$

$$P_{Elle}(PM) = \frac{P(Elle \cap PM)}{P(Elle)} = \frac{\frac{90}{252}}{\frac{120}{252}} = \frac{90}{252} \times \frac{252}{120} = \frac{90}{120}$$

II/ Les probabilités conditionnelles : 3) Avec un arbre

Dans un lot de chemises : $\frac{1}{4}$ de chemises blanches, le reste de rayées. Parmi les blanches, 50% de taille S et le reste de taille L. Parmi les rayées, une proportion $0,4$ de taille S, le reste de taille L. On choisit au hasard une chemise dans le lot, on modélise par l'arbre suivant :