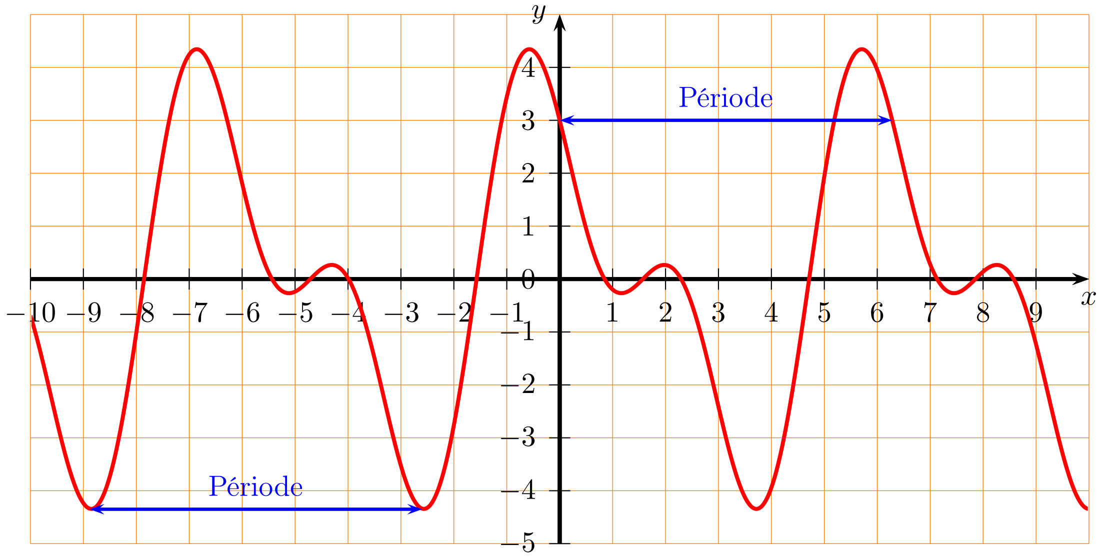
Dans ce cours on va travailler avec des fonctions périodiques et aborder rapidement la notion de fonction paire ou impaire (hors programme, mais facile). Pour ces deux notions, vous pouvez aller sur la page du cours `http://www.barsamian.am/2021-2022/S5P4/` et regarder dans les ressources du chapitre 8, la vidéo "Reconnaître graphiquement parité et périodicité" : `https://www.youtube.com/watch?v=RV3Bi06nQOs`.

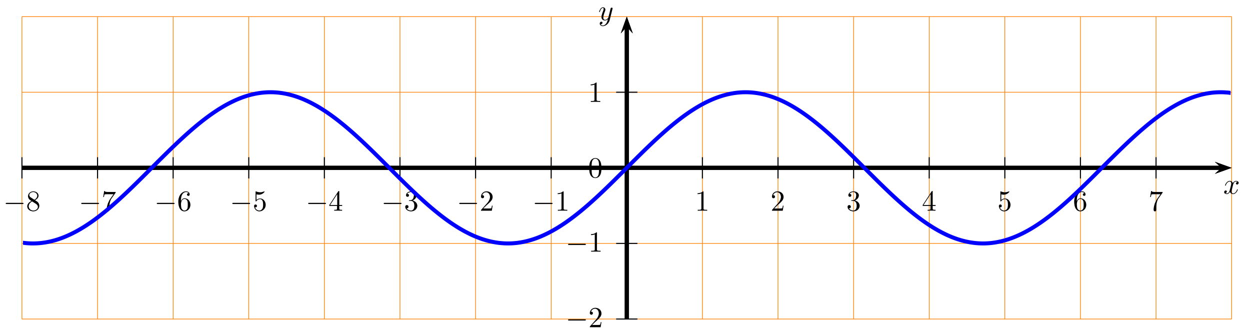
Voici un exemple de fonction périodique : $f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(2x)$:



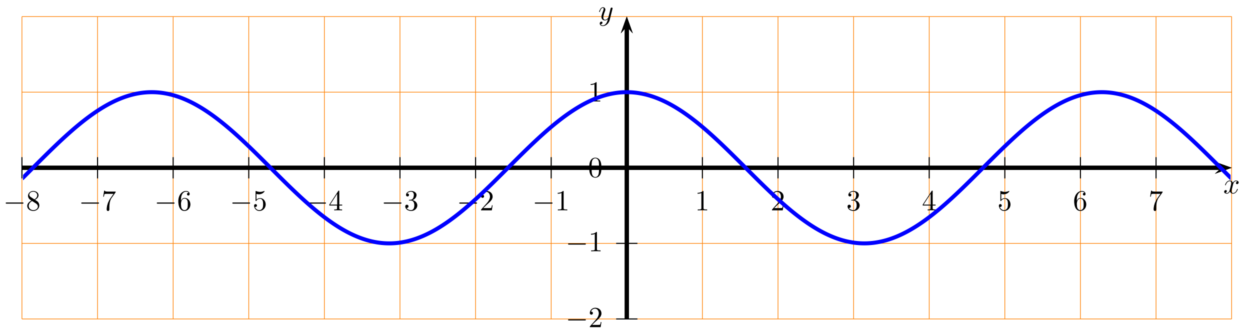
Dans ce chapitre, il faut faire très attention à toujours mettre la calculatrice en radians : s'il y a écrit "DEG" ou "D" en haut à droite de l'écran, la calculatrice est réglée en degrés : il faut changer en "RAD" ou "R" qui indique que la calculatrice est réglée en radians.

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à des fonctions sinusoïdales. Ce sont des fonctions dont le graphique ressemble au graphique de la fonction sinus (avec décalages et/ou étirements).

On rappelle que le graphique (tronqué, il se continue "à l'infini des deux côtés") de la fonction sinus est le suivant. C'est une fonction impaire (le graphique est symétrique par rapport à l'origine ; cela veut aussi dire que $\sin(-x) = -\sin(x)$). C'est une fonction périodique de période 2π.



La fonction cosinus a le graphique suivant (tronqué également. C'est une fonction paire (le graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; cela veut aussi dire que $\cos(-x) = \cos(x)$). On remarque que par rapport au graphique précédent, il y a un décalage de $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ sur l'axe des x, vers la gauche. Cela veut dire que $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

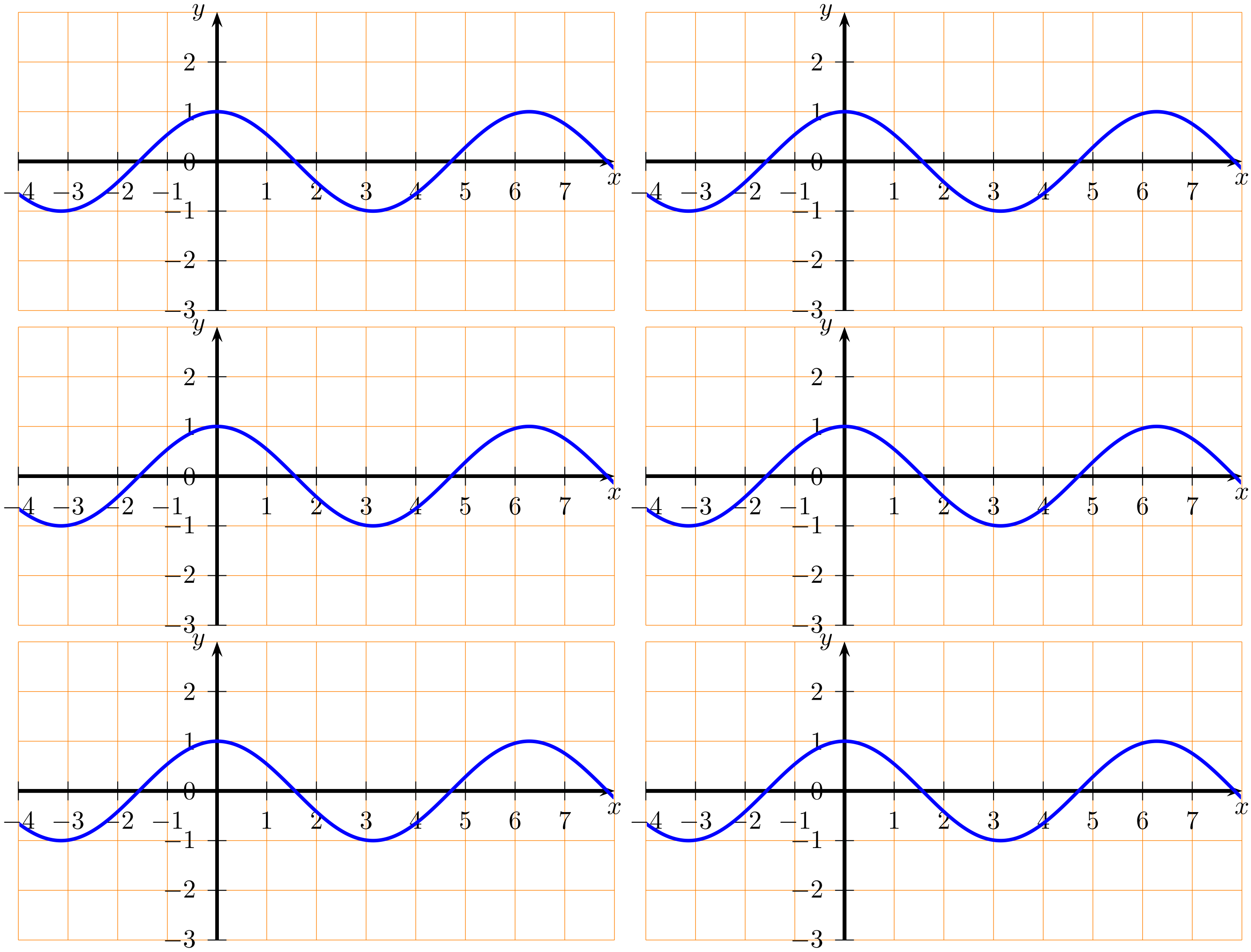


Le but de ce chapitre est d'étudier les fonctions sin, cos et tan, puis de découvrir les fonctions de type $f(x) = a\sin(bx+c)+d$ ou bien $f(x) = a\cos(bx+c)+d$ et leurs propriétés (amplitude, période et déphasage).

Exercice 1

Regarder dans geogebra le graphique des fonctions suivantes. Comparer à chaque fois au graphique de la fonction cosinus, en traçant chacune des fonctions sur les graphiques suivants :

- $\cos(2x)$
- $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}x\right)$
- $3\cos(x)$
- $\cos(x-1)$
- $\cos(2x-1)$
- $\cos(x)+1,5$



Exercice 2

1. Lancer geogebra, et tracer la fonction cosinus. Pour cela, il suffit de taper $f(x) = \cos(x)$.
   Rappel important : quand on parle de la fonction cosinus (idem pour sinus ou tangente), notamment dans geogebra, il est toujours entendu que $cos(x)$ représente le cosinus de x exprimé en radians.
2. Soient A et B les points de la courbe qui ont une ordonnée égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et qui ont une abscisse entre 0 et 2π. Construire ces deux points dans geogebra.

   Pour cela, on pourra tracer la fonction constante égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en tapant $g(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On peut trouver le symbole de racine en activant le clavier de symboles mathématiques (l'icône de clavier est en bas à gauche de l'interface geogebra), ou bien en tapant sqrt(3) (sqrt est l'abréviation de *square root*, qui est la traduction de racine carrée en anglais). On peut alors construire les points d'intersection entre ces deux courbes.
3. Déduire de la question précédente les solutions de l'équation $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, pour $x \in [0; 2\pi[$.
4. Vérifiez vos résultats en demandant à geogebra :

   $$\text{Solutions}(f(x) = g(x), 0 \leq x < 2 \cdot \pi)$$
5. Déduire de la question précédente les solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, pour $x \in [0; 2\pi[$.

6. Vérifiez vos résultats en demandant à geogebra :

$$\text{Solutions}(f(x) \leq g(x), 0 \leq x < 2 \cdot \pi)$$

Geogebra va peut-être vous répondre un ensemble solution un peu bizarre. Si vous obtenez une solution avec le symbole $\wedge$, rappelez-vous qu'on l'a déjà rencontré quand on a travaillé sur les axiomes, cf. `https://xkcd.com/704/`. Donc ce symbole $\wedge$ veut dire "et" en logique (le symbole $\vee$ veut dire "ou"). Il n'est pas possible de demander à geogebra d'afficher l'ensemble solution sous forme d'intervalle malheureusement. Mais il est possible d'avoir une écriture plus simple de la solution en cliquant sur "Factoriser" ou "Développer" (ne me demandez pas pourquoi cela fonctionne...).

Exercice 3

1. Lancer geogebra, et tracer la fonction sinus. Pour cela, il suffit de taper $f(x) = \sin(x)$.
2. Soient A et B les points de la courbe qui ont une ordonnée égale à $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et qui ont une abscisse entre $-\pi$ et 0. Construire ces deux points dans geogebra.
3. Déduire de la question précédente les solutions de l'équation $\sin(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$, pour $x \in [-\pi; \pi[$.
4. Déduire de la question précédente les solutions de l'inéquation $\sin(x) \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pour $x \in [-\pi; \pi[$.

Exercice 4

On va maintenant étudier la courbe de la fonction tangente. On rappelle que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Si x est une mesure d'angle en radians dans $[0; 2\pi[$, quelles sont les valeurs de x pour lesquelles on ne peut pas calculer la tangente ?
2. Ouvrir geogebra, et tracer la courbe de la fonction tangente, par ex. en tapant $f(x) = \tan(x)$. Tracez dans votre cahier une représentation graphique de la fonction, en vous aidant éventuellement de quelques valeurs lues dans geogebra.

Exercice 5

L'évolution de la population P d'une harde de cerfs est modélisée par la fonction :

$$P(t) = 4000 + 500 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{où } t \text{ est mesuré en années.}$$

1. Dessinez le graphe de P pour un an.
2. Quand dans l'année la population est-elle à son maximum ? Quelle est la population à ce moment-là ?
3. Mêmes questions que 2. pour le minimum.
4. Quelle est la période de la fonction P ?

Exercice 6

On calcule la variation annuelle de température T (en °C) à Ottawa, au Canada, par :

$$T(t) = 15,8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 5$$

où t représente le temps en mois et $t = 0$ correspond au 1er janvier.

1. Représentez graphiquement $\mathcal{C}_T$ pour $0 \leq t \leq 12$.
2. Déterminez la température maximale de l'année et la date à laquelle cela se produit.

Exercice 7

Lorsqu'un fleuve se jette dans l'océan, la profondeur de ce fleuve varie en fonction des marées. Le tableau suivant donne la profondeur (en m) de la Tamise, à Londres, sur une durée de 24 heures.

Heure	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Profondeur	8,1	9,0	9,9	10,3	10,1	9,3	8,1	7,0	6,0	5,4	5,5	6,2

Heure	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Profondeur	7,3	8,4	9,5	10,1	10,2	9,7	8,7	7,6	6,6	5,9	5,6	5,9

1. Reportez les données sur un graphique avec le temps sur l'abscisse et la profondeur sur l'ordonnée.
2. (a) À la main : tracez une fonction sinusoïdale approchant au mieux les données du tableau.
   (b) Avec geogebra : téléchargez `http://www.barsamian.am/2021-2022/S5P4/Chap8_Tamise.ggb`, puis déterminez une fonction $P(t) = a\sin(b \cdot t + c) + d$ approchant au mieux les données du tableau.
3. Si un bateau a besoin d'au moins 7 m d'eau pour naviguer en toute sécurité sur la Tamise, déterminez graphiquement les intervalles de temps pendant lesquels la navigation n'est pas sûre.

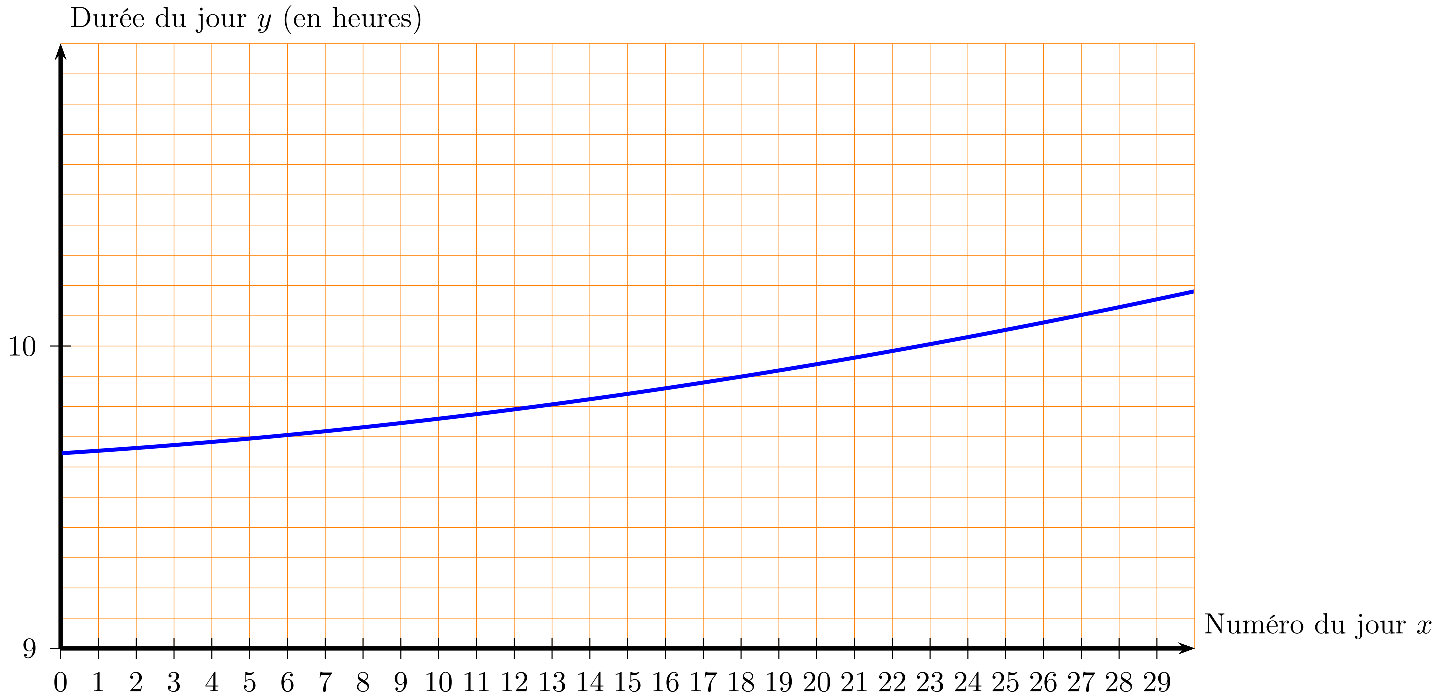
Exercice 8

À Madrid, la longueur du jour D (exprimée en heures) est donnée en fonction de la date par la formule approchée :

$$D(t) = 12 + 2,4\sin(0,0172(t - 80))$$

où t est le numéro du jour depuis le début de l'année.

La figure ci-dessous montre le graphe de D durant le mois de janvier. On a en abscisse le nombre de jours écoulés depuis le début du mois en question, et en ordonnée la durée du jour en heures.



1. Pourquoi ne reconnaît-on pas une fonction sinusoïdale sur le graphique ?
2. Lire graphiquement la durée du jour le 12 janvier.
3. Quelle était la durée du jour le 23 mai ?
4. Pouvez-vous expliquer les valeurs des paramètres de la fonction D (à savoir 12, $2,4$, $0,0172$ et -80) ?