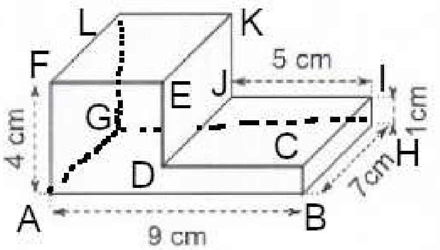
Ex. 1 5 points

Dans le solide suivant, tous les angles sont droits (il s'agit d'un pavé droit duquel on a enlevé un pavé droit plus petit).

Déterminer l'aire de la surface latérale de ce solide.



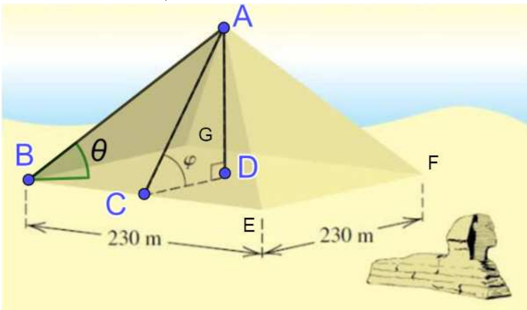
Ce solide a 8 faces, qui sont toutes des rectangles à part la face de devant (ABCDEF) et de derrière (GHIJKL). La surface latérale est l'ensemble des faces, sauf la base. Il reste donc 7 faces dont il faut calculer l'aire :

$\mathcal{A}(\text{ABCDEF}) = \mathcal{A}(\text{GHIJKL}) = 4 \times 4 + 5 \times 1 = 21$; $\mathcal{A}(\text{BHIC}) = 7 \times 1 = 7$; $\mathcal{A}(\text{CIJD}) = 5 \times 7 = 35$; $\mathcal{A}(\text{DJKE}) = 7 \times 3 = 21$; $\mathcal{A}(\text{EKLF}) = 7 \times 4 = 28$; $\mathcal{A}(\text{AGLF}) = 7 \times 4 = 28$. En tout, cela fait donc $\boxed{161 \text{ cm}^2}$.

Ex. 2

La Grande Pyramide de Gizeh est une pyramide à base carrée, avec une longueur de base de 230 m. Son apex A est situé au-dessus du point D, le centre de la base.

L'angle formé par la hauteur inclinée AC avec le plan de la base est $\phi = 50,3°$.



3 points 1. Déterminez la mesure de AC (arrondir au mètre près).

2 points 2. Montrer que la hauteur AD de la pyramide est 138, 5 m.

3 points 3. Déterminer la longueur de l'arête AB de la pyramide (arrondir au mètre près).

2 points 4. Déterminer la mesure de l'angle θ formé par l'arête AB avec le plan de la base.

1. Dans le triangle ACD rectangle en D, [AC] est l'hypoténuse. On connaît le côté [CD] (puisque D est le centre de la base, $CD = \dfrac{230}{2} = 115$) qui est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACD} = \phi = 50,3°$, donc on peut écrire que $\cos(\phi) = \dfrac{CD}{AC}$:

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \frac{CD}{AC} && \text{On remplace par les valeurs} \\ \cos(50,3°) &\approx \frac{115}{AC} && \times AC \\ \cos(50,3°) \times AC &\approx 115 && \div \cos(50,3°) \\ AC &\approx \frac{115}{\cos(50,3°)} \approx \boxed{180} \end{aligned}$$

2. On travaille encore dans le triangle ACD, mais cette fois on utilise la tangente : $\tan(\phi) = \dfrac{AD}{CD}$:

$$\begin{aligned} \tan(\phi) &= \frac{AD}{CD} && \text{On remplace par les valeurs} \\ \tan(50,3°) &\approx \frac{AD}{115} && \times 115 \\ 115\tan(50,3°) &\approx AD && \text{On calcule} \\ \boxed{138,5} &\approx AD \end{aligned}$$

3. Pour calculer AB, on va se placer dans le triangle ABD rectangle en D. On vient de trouver $AB \approx 138,5$, et on peut trouver la longueur BD : puisque D est le centre de la base, BD est la moitié de la diagonale du carré. Calculons donc la diagonale du carré BEFG : on applique le théorème de Pythagore dans le triangle BEF rectangle en E :
$BF^2 = BE^2 + EF^2 = 230^2 + 230^2 = 105\,800$. Donc $BF = \sqrt{105\,800}$.
Du coup $BD = \dfrac{1}{2}\sqrt{105\,800} \approx 162,6$. On peut appliquer le théorème de Pythagore dans ABD rectangle en D :
$AB^2 = AD^2 + DB^2 \approx 138,5^2 + 162,6^2 \approx 45\,621$. Donc $AB \approx \sqrt{45\,621} \approx \boxed{214}$.

4. Pour l'angle $\theta = \widehat{DBA}$, on va se placer dans le triangle ABD rectangle en D. Dans ce triangle on connaît toutes les mesures des côtés. On peut par exemple utiliser [AD] le côté opposé à $\widehat{DBA} = \theta$, et [BD] qui est adjacent à θ, donc :

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{AD}{BD} && \text{On remplace par les valeurs} \\ \tan(\theta) &\approx \frac{138,5}{162,6} \approx 0,85 && \text{On utilise arctan} \\ \theta &\approx \arctan(0,85) \approx \boxed{40,4°} \end{aligned}$$

Ex. 3

	Une école compte 400 étudiants. 250 d'entre eux jouent d'un instrument de musique et 100 d'entre eux font partie de la chorale. La probabilité qu'un élève choisi au hasard ne joue d'aucun instrument et ne chante pas dans la chorale est $\frac{1}{5}$.
3 points	1. Traduire la situation à l'aide d'un tableau ou d'un diagramme.
1 point	2. Combien d'étudiants font partie de la chorale et jouent également d'un instrument de musique ?
2 points	3. Trouver la probabilité qu'un élève choisi au hasard fasse partie de la chorale mais ne joue d'aucun instrument.
2 points	4. Trouver la probabilité qu'un membre de la chorale choisi au hasard ne joue d'aucun instrument.
2 points	5. On choisit au hasard un élève de l'école. Sachant qu'il ne joue d'aucun instrument, trouver la probabilité qu'il fasse partie de la chorale.

1. Mise en mathématiques de l'énoncé : ici on peut faire un tableau à double entrée ou un diagramme de Venn (mais un arbre n'est pas vraiment adapté). Le plus simple est le tableau à double entrée, car on peut directement reporter les nombres de l'énoncé (en rouge).

Chorale \ Instrument	Oui	Non	Total
Oui	30	70	100
Non	220	$\frac{1}{5} \times 400 = 80$	300
Total	250	150	400

2. On peut directement lire dans le tableau qu'il y a $\boxed{\text{30 élèves}}$ qui font partie de la chorale et jouent d'un instrument.

Pour la suite de l'exercice, si on choisit un élève au hasard dans l'école, on va noter C = "l'élève fait partie de la chorale" et I = "l'élève joue d'un instrument".

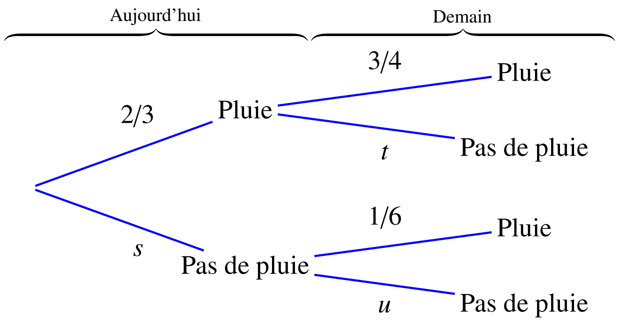
3. Ici on demande $P(\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{I}})$. On lit dans le tableau $\frac{\text{effectif}(\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{I}})}{\text{effectif total}} = \frac{70}{400} = \boxed{0,175}$.
4. Cette fois-ci on parle d'un élève dont on <u>sait</u> qu'il fait partie de la chorale. On demande donc $P_{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{I}})$. On lit dans le tableau $\frac{\text{effectif}(\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{I}})}{\text{effectif}(\mathrm{C})} = \frac{70}{100} = \boxed{0,7}$.
5. Cette fois-ci on parle d'un élève dont on <u>sait</u> qu'il ne joue pas de musique. On demande donc $P_{\overline{\mathrm{I}}}(\mathrm{C})$. On lit dans le tableau $\frac{\text{effectif}(\overline{\mathrm{I}} \cap \mathrm{C})}{\text{effectif}(\overline{\mathrm{I}})} = \frac{70}{150} \approx \boxed{0,467}$.

Ex. 4

Marie résout le problème suivant :

- La probabilité qu'il pleuve aujourd'hui est de $\frac{2}{3}$.
- S'il pleut aujourd'hui, la probabilité qu'il pleuve demain est de $\frac{3}{4}$.
- S'il ne pleut pas aujourd'hui, la probabilité qu'il pleuve demain est de $\frac{1}{6}$.

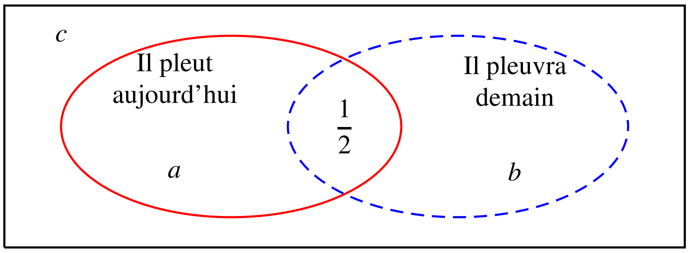
Marie utilise un arbre pour expliquer la situation.



1 point — 1. Donner sous forme de fraction les valeurs de s, t et u.

3 points — 2. Calculer les probabilités des événements E = “il pleut les deux jours”, F = “il pleut au moins un des deux jours” et G = “il pleuvra demain”.

Anne résout le même problème avec un diagramme de Venn :



2 points — 3. Calculer les valeurs a, b et c.

2 points — 4. Est-ce que les événements “il pleut aujourd'hui” et “il pleuvra demain” sont indépendants ?

Dans la suite, on va noter A = “il pleut aujourd'hui” et on garde donc la notation G = “il pleut demain”.

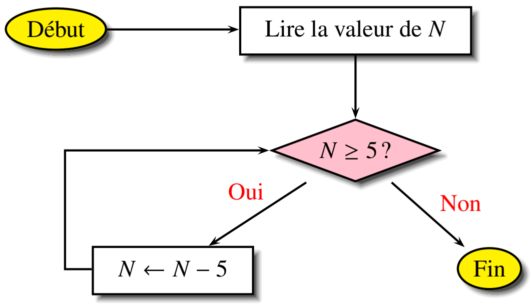
1. $s = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$; $t = 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$; $u = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$.
2. L'événement E = $\mathrm{A} \cap \mathrm{G}$ = “il pleut les deux jours” est la branche tout en haut. Donc la probabilité est $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{G}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \boxed{0,5}$.
   Remarque : en continuant de lire l'énoncé, on voit que c'est bien la valeur qui est donnée par Anne dans le diagramme de Venn plus bas.

   L'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{G}$ = “il pleut au moins un des deux jours” est présent sur les trois branches du haut. On peut additionner les trois probabilités, ou plus simplement remarquer qu'une seule branche correspond à l'événement contraire $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{G}}$ = “il ne pleut aucun des deux jours”, donc c'est plus facile de calculer $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{G}) = 1 - P\left(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{G}}\right) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = 1 - \frac{5}{18} = \boxed{\frac{13}{18}}$.

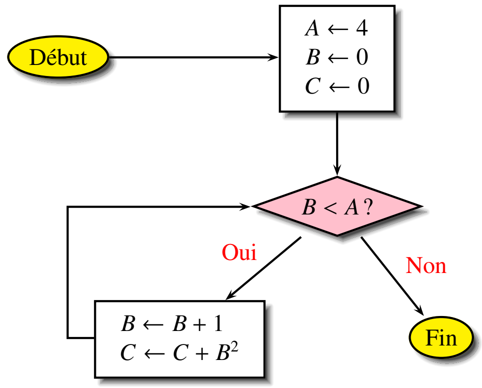
   L'événement G = “il pleut demain” est présent sur la branche du haut et la 3e branche (en partant du haut), donc on calcule $P(\mathrm{G}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \boxed{\frac{5}{9}}$.
3. $a = P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{G}}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{6}}$; $b = P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{G}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{18}}$; $c = P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{G}}) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{18}}$.
4. On voit sur l'arbre que $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{G}) \neq P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{G})$ donc $\boxed{\text{A et G ne sont pas indépendants}}$. On peut aussi voir que $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{G})$ est différent de $P(\mathrm{G})$ ou calculer $P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{G})$ et voir que c'est différent de $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{G})$.

Ex. 5

Algorithme 1.



Algorithme 2.



1. Cette question porte sur l'algorithme 1.
   - 2 points — (a) Que contient la variable N à la fin de l'algorithme si, au départ, on rentre la valeur $N = 23$?
   - 2 points — (b) Même question si, au départ, $N = 50$.
2. Cette question porte sur l'algorithme 2.
   - 4 points — (a) Que contiennent les variables B et C à la fin de l'algorithme ?

1. Si N démarre à 23, voici un tableau de suivi de la valeur de N au cours de l'algorithme :

Instruction	N
Lire la valeur de N	23
$N \geq 5$?	Le test est vrai → on va à gauche
$N \leftarrow N - 5$	18
$N \geq 5$?	Le test est vrai → on va à gauche
$N \leftarrow N - 5$	13
$N \geq 5$?	Le test est vrai → on va à gauche
$N \leftarrow N - 5$	8
$N \geq 5$?	Le test est vrai → on va à gauche
$N \leftarrow N - 5$	3
$N \geq 5$?	Le test est faux → on va à droite
FIN de l'algorithme 1	

Du coup si N démarre à 23, elle finit à $\boxed{3}$. Si N démarre à 50, c'est le même principe, N baisse de 5 en 5 jusqu'à valoir $\boxed{0}$ (la première valeur qui n'est pas ≥ 5).

2. Voici un tableau de suivi des valeurs de A, B et C au cours de l'algorithme :

Instruction	A	B	C
$A \leftarrow 4$	4	-	-
$B \leftarrow 0$	4	0	-
$C \leftarrow 0$	4	0	0
$B < A$?	Le test est vrai → on va à gauche		
$B \leftarrow B + 1$	4	$0 + 1 = 1$	0
$C \leftarrow C + B^2$	4	1	$0 + 1^2 = 1$
$B < A$?	Le test est vrai → on va à gauche		
$B \leftarrow B + 1$	4	$1 + 1 = 2$	1
$C \leftarrow C + B^2$	4	2	$1 + 2^2 = 5$
$B < A$?	Le test est vrai → on va à gauche		
$B \leftarrow B + 1$	4	$2 + 1 = 3$	5
$C \leftarrow C + B^2$	4	3	$5 + 3^2 = 14$
$B < A$?	Le test est vrai → on va à gauche		
$B \leftarrow B + 1$	4	$3 + 1 = 4$	14
$C \leftarrow C + B^2$	4	4	$14 + 4^2 = 30$
$B < A$?	Le test est faux → on va à droite		
FIN de l'algorithme 2			

Ainsi, à la fin de l'algorithme, $\boxed{B \text{ vaut } 4 \text{ et } C \text{ vaut } 30}$.