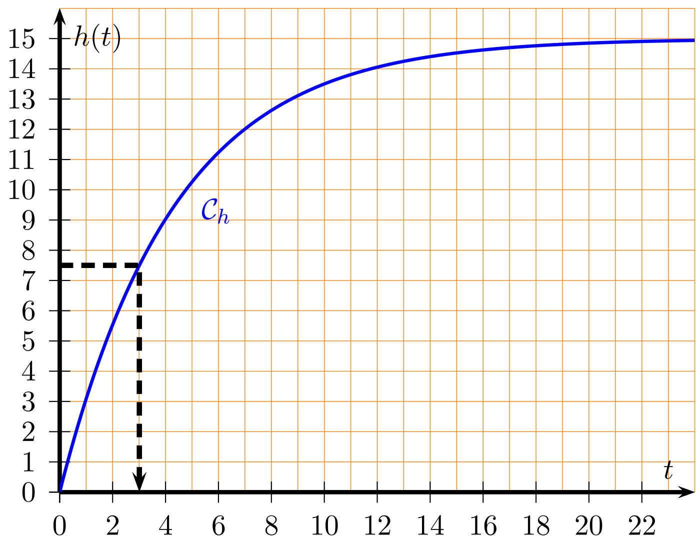
Test n°5 du vendredi 18/03/2022 (Geogebra ou calculatrice : ✓) Correction

Exercice 1

	La croissance d'un bambou dont la hauteur maximale atteinte est de 15 mètres est donnée par la fonction h définie ci-dessous : $$h(t) = 15(1 - 10^{-0,1t}) \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$ où t est le temps en semaines depuis le début des mesures et $h(t)$ la hauteur du bambou en mètres.
2 points	1. Calculer la hauteur du bambou (si nécessaire, on arrondira au cm près) : (a) au début des mesures (b) après 9 semaines (c) après 15 semaines
3 points	2. Esquisser le graphique de h sur le premier semestre des mesures.
1 point	3. Au bout de combien de semaines le bambou a-t-il atteint la moitié de sa hauteur maximale ?
1 point	4. S'agit-il d'une croissance exponentielle ?

1. À l'aide de $h(t) = 15(1 - 10^{-0,1t})$ on calcule :
   (a) $h(0) = 15(1 - 10^{-0,1\times 0}) = 15(1 - 10^0) = 15(1 - 1) = 15 \times 0 = 0$. La hauteur du bambou au début des mesures est de $\boxed{0 \text{ m}}$.
   (b) $h(9) = 15(1 - 10^{-0,1\times 9}) = 15(1 - 10^{-0,9}) \approx 13,11$. La hauteur du bambou après 9 semaines est d'environ $\boxed{13{,}11 \text{ m}}$.
   (c) $h(15) = 15(1 - 10^{-0,1\times 15}) = 15(1 - 10^{-1,5}) \approx 14,53$. La hauteur du bambou après 15 semaines est d'environ $\boxed{14{,}53 \text{ m}}$.
2. Le premier semestre, cela fait environ 24 semaines. On a déjà 3 valeurs, on peut en calculer quelques autres avant de tracer :

t	$h(t)$
0	0
1	$3,08$
3	$7,48$
6	$11,23$
9	$13,11$
15	$14,53$
24	$14,94$



3. On lit graphiquement que c'est environ autour de la 3e semaine. On calcule $h(3) \approx 7,48$ (insuffisant) et $h(4) \approx 9,03$ (suffisant), donc c'est $\boxed{\text{à la 4e semaine}}$.
4. Ce n'est pas une croissance exponentielle (une croissance exponentielle, ça croît de plus en plus vite, vers des valeurs aussi grandes que voulu, alors qu'ici la croissance finit par s'arrêter puisqu'on nous dit, et on voit sur le graphique, que la fonction ne dépasse jamais 15).

Exercice 2

3 points	Résoudre les équations suivantes : 1. $16^2 = 4^x$ 2. $0,0001^x = 0,1$ 3. $4^{x-5} = 2^x$ BONUS $\sqrt{5^x} = 25$

1. $16^2 = 4^x$. On reconnaît que $16 = 4^2$. Donc $16^2 = \left(4^2\right)^2 = 4^{2\times 2} = 4^4$. On peut donc écrire :
$$\begin{aligned} 4^4 &= 4^x \\ x &= 4 \end{aligned} \quad \text{Exposants égaux}$$
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{4\}}$.

2. $0,0001^x = 0,1$. On reconnaît que $0,0001 = 0,1^4$. Donc $0,0001^x = \left(0,1^4\right)^x = 0,1^{4x}$. On peut donc écrire :
$$\begin{aligned} 0,1^{4x} &= 0,1 && a = a^1 \\ 0,1^{4x} &= 0,1^1 && \text{Exposants égaux} \\ 4x &= 1 && \div 4 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}}$.

3. $4^{x-5} = 2^x$. On reconnaît que $4 = 2^2$. Donc $4^{x-5} = \left(2^2\right)^{x-5} = 2^{2(x-5)} = 2^{2x-10}$. On peut donc écrire :
$$\begin{aligned} 2^{2x-10} &= 2^x && \text{Exposants égaux} \\ 2x - 10 &= x && -x \\ x - 10 &= 0 && +10 \\ x &= 10 \end{aligned}$$
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{10\}}$.

BONUS — $\sqrt{5^x} = 25$. On peut par exemple se rappeler que prendre la racine carrée, c'est élever à la puissance $\frac{1}{2}$, ou bien élever les deux membres de l'équation au carré. Première méthode : $\sqrt{5^x} = (5^x)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{x}{2}}$. On peut donc écrire :
$$\begin{aligned} 5^{\frac{x}{2}} &= 25 && 25 = 5^2 \\ 5^{\frac{x}{2}} &= 5^2 && \text{Exposants égaux} \\ \frac{x}{2} &= 2 && \times 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{4\}}$.

Exercice 3

2 points	Une voiture perd chaque année $t\%$ de sa valeur. La formule de la valeur (en euros) d'une voiture achetée à un prix P (en euros) au bout de n années est donc $V = P \times (1-t)^n$. 1. Compléter le tableau suivant (2 cases à compléter). Si nécessaire, on arrondira au centime près.

Prix initial P	Taux de dépréciation annuel t	Durée n	Valeur V
15 000€	15%	5 ans	15 000€ $\times (1-0,15)^5 \approx$ $\boxed{6\ 655,58€}$
$\frac{10\ 240€}{(1-0,2)^4} = \boxed{25\ 000€}$	20%	4 ans	10 240€

	2. Toujours avec la même formule, on sait maintenant qu'une voiture achetée au prix de $P = 10\ 000€$ ne vaut plus que $V = 5\ 314,41$ au bout de 6 ans.
1 point	(a) Écrire l'équation à laquelle on aboutit, où l'inconnue est t.
1 point	(b) Trouver la valeur de t. Si nécessaire, on arrondira au dixième de pourcent près.

1. La formule donnée permet de remplir la première ligne : $V = P \times (1-t)^n$. Pour remplir la ligne 2, on peut exprimer P en fonction du reste :
$$\begin{aligned} V &= P \times (1-t)^n && \div (1-t)^n \\ \frac{V}{(1-t)^n} &= P \end{aligned}$$

(a) Dans la formule, on remplace toutes les données, et il vient $\boxed{5\ 314,41 = 10\ 000 \times (1-t)^6}$.

(b) On peut tester différentes valeurs de t à la calculatrice, en tâtonnant, ou bien on peut résoudre :
$$\begin{aligned} 5\ 314,41 &= 10\ 000 \times (1-t)^6 && \div 10\ 000 \\ \frac{5\ 314,41}{10\ 000} &= (1-t)^6 && \text{Calcul} \\ 0,531441 &= (1-t)^6 && \text{Racine 6-ième (car } 0,531441 > 0) \\ \sqrt[6]{0,531441} &= 1 - t && -1 \\ \sqrt[6]{0,531441} - 1 &= -t && \times(-1) \\ 1 - \sqrt[6]{0,531441} &= t && \text{Calcul} \\ \boxed{0,1} &= t \end{aligned}$$