# 1 Fonctions (50 points sur 100)

## 1.1 Les fonctions au programme

- fonctions polynomiales : $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.
- fonction exponentielle : $\mathrm{e}^x$
- fonction logarithme népérien : $\ln(x)$
- également $\mathrm{e}^{ax+b}$ et $\ln(ax+b)$

## 1.2 Dérivées

• La dérivée de $f$ en $a$, c'est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a$.

• La dérivée permet d'étudier l'évolution d'une fonction (dérivée positive $\Leftrightarrow$ fonction croissante ; dérivée négative $\Leftrightarrow$ fonction décroissante). On a un extremum quand la dérivée s'annule en changeant de signe (maximum quand elle fait "+ 0 -" et minimum quand elle fait "- 0 +").

• Remarque : au lieu de dire "nombre dérivé" on dit parfois "taux d'accroissement instantané".

| Si $f(x)=$ | alors la dérivée de $f$ est $f'(x)=$ | sur l'intervalle | |
|---|---|---|---|
| $x^n$ | $n\times x^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\mathrm{e}^{ax+b}$ | $a\times \mathrm{e}^{ax+b}$ | $\mathbb{R}$ | (pas dans le formulaire) |
| $\ln(x)$ | $\dfrac{1}{x}$ | $]0;+\infty[$ | |
| $\ln(ax+b)$ | $\dfrac{a}{ax+b}$ | là où $ax+b>0$ | (pas dans le formulaire) |

• Ex. : si $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{4}\ln(x)+0,2\mathrm{e}^{2x+3}$ alors $f'(x)=3\times 2x+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{x}+0,2\times 2\mathrm{e}^{2x+3}=6x+\dfrac{1}{4x}+0,4\mathrm{e}^{2x+3}$.

• Équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ (la courbe de $f$) au point d'abscisse $a$ : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

## 1.3 Primitives, intégrales

• Une primitive $F$ de $f$, c'est une fonction dont la dérivée fait $f$ (calcul de primitive et calcul de dérivée sont deux opérations réciproques).

• L'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[a;b]$, c'est l'aire entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équation $x=a$ et $x=b$. ⚠ Pour une fonction négative, c'est l'opposé de l'aire.

| Si $f(x)=$ | alors les primitives de $f$ sont $F(x)=$ | sur l'intervalle | |
|---|---|---|---|
| $x^n$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+k$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x+k$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\mathrm{e}^{ax+b}$ | $\dfrac{1}{a}\times \mathrm{e}^{ax+b}+k$ | $\mathbb{R}$ | (pas dans le formulaire) |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert+k$ | là où $x\neq 0$ | |
| $\dfrac{1}{ax+b}$ | $\dfrac{1}{a}\times\ln\lvert ax+b\rvert+k$ | là où $ax+b\neq 0$ | (pas dans le formulaire) |

• Exemple : si $f(x)=3x^2+\dfrac{2}{4x+1}+2\mathrm{e}^{2x+3}$ alors une primitive est $F(x)=3\times\dfrac{x^3}{3}+2\times\dfrac{1}{4}\times\ln\lvert 4x+1\rvert+\mathrm{e}^{2x+3}$.

• Formule de Chasles : $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

• Formules du formulaire pour l'intégrale entre $a$ et $b$ ($\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ qui fonctionne pour toute primitive donc prendre la constante égale à 0) et l'aire entre deux courbes ($\displaystyle\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert\,\mathrm{d}x$).

### 1.4 Résolution d'équations

- Équations où l'inconnue est en puissance ou dans un logarithme.
- Pour les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on peut résoudre $f(x) = g(x)$.

• Pour résoudre une équation de type $ax^2 + bx + c = 0$, commencer par identifier les valeurs de $a$, $b$ et $c$, puis calculer la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Dans le cas général, $\Delta \geq 0$ et on a deux solutions $x1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ (ce qu'on note souvent $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$).

Si on veut le signe de $ax^2 + bx + c$, on commence par regarder si la parabole est tournée vers le haut ($a > 0$) ou le bas ($a < 0$) et on peut alors tracer le tableau de signes grâce aux solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

### 1.5 À la calculatrice

- Limites : ex. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
- Dérivées : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$
- Signe de la dérivée : solve $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) > 0, x\right)$
- Intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- Aires entre deux courbes : $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$
- Volumes de révolution : $\displaystyle\int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$
- Longueurs d'arc : arcLen$(f(x), x, a, b)$ (menu, analyse, longueur d'arc). Ne pas utiliser $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$ qui est trop compliqué à taper.
- Équation de la tangente : tangentLine$(f(x), x, a)$ (menu, analyse, tangente)
- Maximum d'une fonction sur l'intervalle $[a; b]$ : fMax$(f(x), x, a, b)$ (menu, analyse, maximum). Remarque : si on ne met rien pour $a$ et $b$, ça calcule sur $\mathbb{R}$. ⚠ Cet outil donne la valeur de $x$ pour laquelle $f$ est maximale (donc, la valeur pour laquelle le maximum est atteint). Pour trouver la valeur maximale, il faut calculer l'image de cette valeur par $f$ ! Ex. si $f(x) = \dfrac{678}{2 + \mathrm{e}^{-x}}$, la calculatrice répond $x = \infty$ ce qui veut dire que "le maximum est atteint en l'infini" (à abus de langage près), et donc pour calculer la valeur maximale, il faut calculer la limite de $f$ en $\infty$ (la calculatrice donne 339).
- Minimum avec fMin, mêmes remarques que précédemment.
- Savoir que mettre un "point" dans un calcul force la calculatrice à donner une valeur approchée.

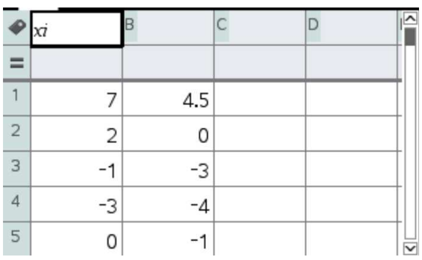
## 2 Statistiques à 1 variable (sans calculatrice, 5 points sur 100)

Calculs statistiques sur une série statistique $x_1, x_2, \ldots, x_p$ (avec effectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$) :

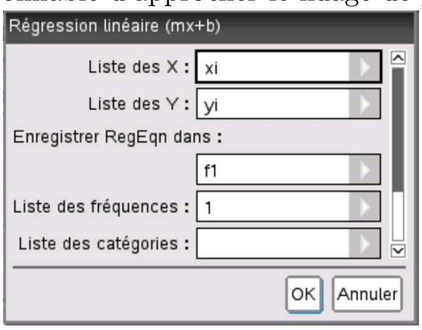
- Moyenne $\overline{x} = \dfrac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \cdots + n_p \cdot x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$.
- Médiane, quartiles, écart inter-quartile.
- Histogramme, diagramme en boîte à moustaches (ou diagramme de Tukey).

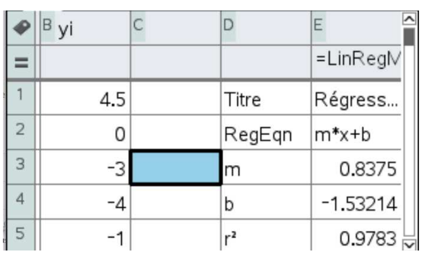
## 3 Statistiques à 2 variables (avec calculatrice, 20 points sur 100)

• Régression linéaire par la méthode des moindres carrés (à la calculatrice), avec calcul du coefficient de corrélation linéaire de Bravais–Pearson, noté $r$. S'il est "grand" (proche de 1 ou proche de -1, typiquement si $|r| \geq 0,9$) on considère qu'il est raisonnable d'approcher le nuage de points par une droite.



| | xi | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| = | | | | |
| 1 | 7 | 4.5 | | |
| 2 | 2 | 0 | | |
| 3 | -1 | -3 | | |
| 4 | -3 | -4 | | |
| 5 | 0 | -1 | | |



| | B yi | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| = | | | | =LinRegM |
| 1 | 4.5 | | Titre | Régress... |
| 2 | 0 | | RegEqn | m*x+b |
| 3 | -3 | | m | 0.8375 |
| 4 | -4 | | b | -1.53214 |
| 5 | -1 | | r² | 0.9783 |

• Régression linéaire avec la méthode de la droite de Mayer (séparer le nuage en deux par $x$ croissant, calculer les deux points moyens, calculer l'équation de la droite qui les relie).

• Régression exponentielle ou logarithmique (à la calculatrice seulement) : par changement de variable puis régression linéaire, ou par méthode directe, revoir les deux méthodes dans la fiche du cours :
`http://www.barsamian.am/2021-2022/S7P3/Chap6_Stats_2_var_methodes.pdf`

# 4 Probabilités (30 points sur 100)

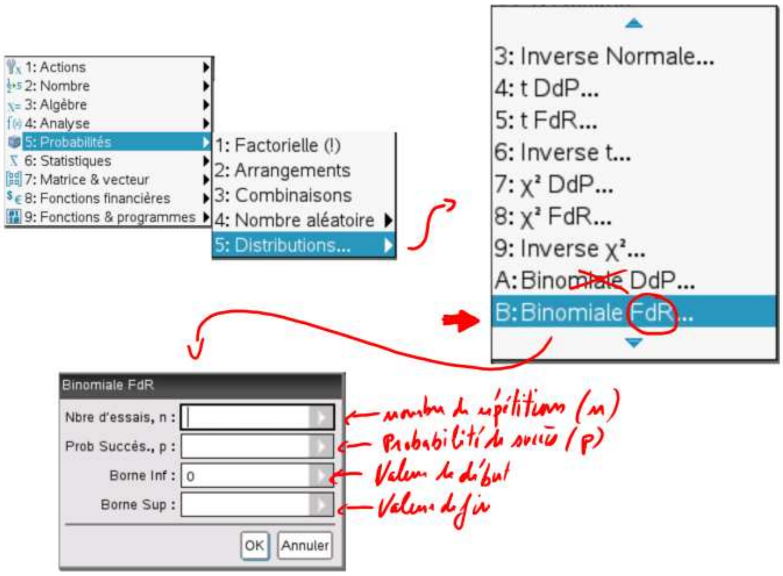
## 4.1 Rappels de S5

- Utilisation d'un tableau à double entrée, d'un arbre ou d'un diagramme de Venn.
- Événement contraire : pour un événement $A$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Probabilité conditionnelle : la probabilité de $B$ sachant $A$ : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (c'est dans le formulaire, par contre il faut bien réussir à identifier, dans un texte, quand on a affaire à une probabilité de ce type ; il faut réussir à faire des calculs de ce type dans un tableau à double entrée ou avec un arbre).

## 4.2 Rappels de S6 : loi binomiale

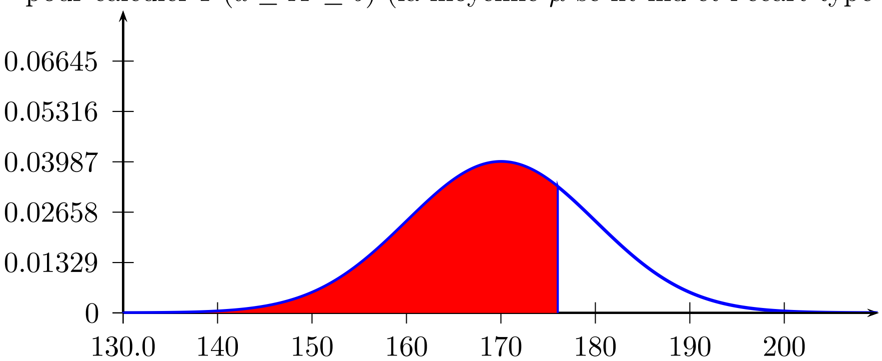
• On est dans une situation de loi binomiale quand on a la répétition à l'identique de la même expérience, de manière indépendante, et qu'on s'intéresse à la même issue de l'expérience.

• Les paramètres sont $n$ (le nombre de répétitions) et $p$ (la probabilité de succès sur une des répétitions). Alors on tape binomCdf$(n, p, a, b)$ pour calculer $P(a \leq X \leq b)$.




## 4.3 Loi normale

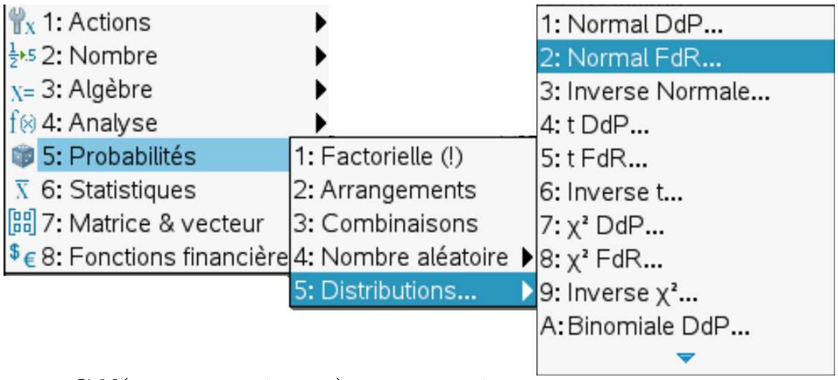
• Quand on a toutes les données et qu'on cherche une probabilité : à la calculatrice, on utilise normCdf$(a, b, \mu, \sigma)$ pour calculer $P(a \leq X \leq b)$ (la moyenne $\mu$ se lit mu et l'écart-type $\sigma$ se lit sigma).

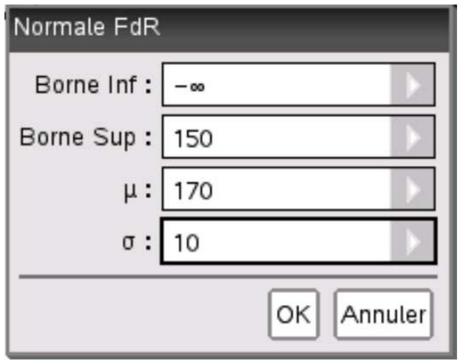



Par exemple, pour la loi normale de moyenne $\mu = 170$ et d'écart-type $\sigma = 10$, $P(X \leq 176)$ correspond à l'aire rouge ci-dessus et on tape à la calculatrice : normCdf$(-\infty, 176, 170, 10) \approx 0,73$.

On modélise la taille des individus d'une population par une loi normale de moyenne 170 cm et d'écart-type 10 cm. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard dans cette population ait une taille inférieure à 150 cm ?

Traduction : on a $\mu = 170$, $\sigma = 10$, et on considère $]a;b[=]-\infty;150[$ (remarque : l'intervalle $]0;150[$ serait même plus pertinent ici pour une variable qui ne peut prendre que des quantités positives, mais le calcul donne des valeurs quasiment identiques). Du coup à la calculatrice on trouve $\boxed{2,2\%}$ :




normCdf$(-\infty, 150, 170, 10)$ 0.02275

• Quand on donne la probabilité plus quelques données, et qu'il en manque une, utiliser solve. Si on modélise une taille par ex. de moyenne 10 et d'écart-type 2, et qu'on cherche la valeur pour laquelle 70% des tailles sont inférieures à cette valeur, on résout :
solve(normCdf$(-\infty, b, 10, 2) = 0.7, b$)

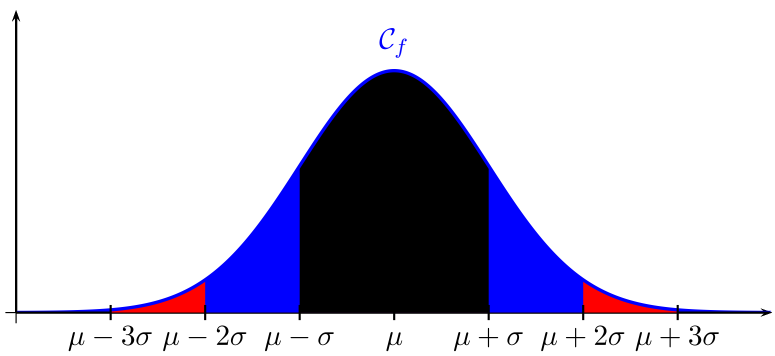
Dans une grande cantine universitaire, on propose trois menus (poisson, viande, végétarien).
Le nombre de menus poisson choisis par jour suit une distribution normale de moyenne $\mu = 240$.
Pour 95% des jours, le nombre de menus poisson choisis est compris entre 200 et 280.
Calculer l'écart-type du nombre de menus poisson choisis par jour.

On peut taper solve(normCdf$(200, 280, 240, x) = 0.95, x$), mais ici cela ne fonctionne pas directement car l'équation est trop difficile pour la calculatrice, il faut l'aider. Il faut lui donner une "grande" valeur de $x$ pour "l'aider" pour qu'elle arrive à trouver. Ici par exemple on tape :
solve(normCdf$(200, 280, 240, x) = 0.95, x = 100$), et la calculatrice nous trouve $\sigma \approx 20,4$.

• Utiliser le croquis de la fonction de répartition pour s'aider, et se souvenir que :

- 68% des valeurs sont dans $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$ (noir)
- 95,4% des valeurs sont dans $[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$ (noir + bleu)
- 99,7% des valeurs sont dans $[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]$ (noir + bleu + rouge)

• `http://www.barsamian.am/2021-2022/S7P3/Chap7_Loi_normale_methodes.pdf`




## 5 Pour réviser

• Les sujets de prébac, bac, et ce qu'on a fait en classe : `http://www.barsamian.am/2021-2022/S7P3/`
• Voir par exemple :
`http://www.barsamian.am/EE_examens/S7P3_Annales_prebac/2021_S7P3_Prebac_Sujets_et_corrections.pdf`
`http://www.barsamian.am/EE_examens/S7P3_Annales_prebac/2022_S7P3_Prebac_Sujets_et_corrections.pdf`
`http://www.barsamian.am/2021-2022/S7P3/DMProbas_correction.pdf`