

Chapitre 1.

Phénomènes continus d'évolution

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2021–2022



- Les fonctions exponentielles
- Les fonctions logarithmes
- Étude de certaines fonctions

Introduction : COVID-19, une croissance exponentielle

<https://www.washingtonpost.com/graphics/2020/world/corona-simulator/>

Free-for-all



Attempted quarantine



Moderate distancing

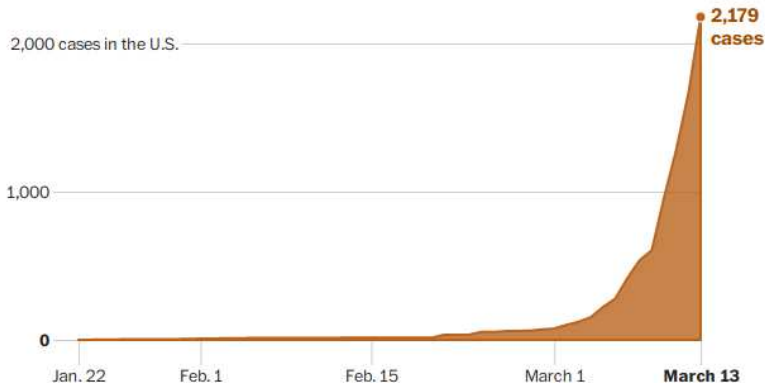


Extensive distancing



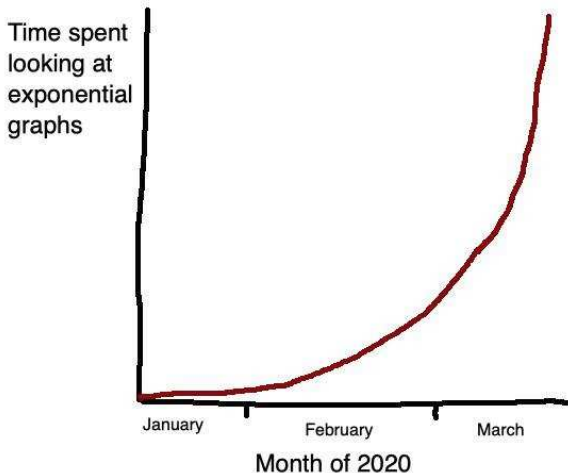
Introduction : COVID-19, une croissance exponentielle

<https://www.washingtonpost.com/graphics/2020/world/corona-simulator/>



Introduction : COVID-19, une croissance exponentielle

<https://elbruno.com/2020/03/29/humor-time-looking-at-exponential-graphs-during-the-past-months/>



Soit $b > 0, b \neq 1$. Alors la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto b^x$ est la fonction exponentielle de base b .



Croissance exponentielle

Si $b > 1$, on parle de croissance exponentielle.

Exemple : placement d'argent à un taux $t > 0$.



Décroissance exponentielle

Si $0 < b < 1$, on parle de décroissance exponentielle.

Exemple : datation au carbone 14.

Remarque : si $b = 1$, la fonction $x \mapsto 1^x$ est... la fonction constante égale à 1!

Remarque : si $b < 0$, on ne peut pas définir sur \mathbb{R} la fonction $x \mapsto b^x$.

Les propriétés sur les exposants qui ont été vues lors des années précédentes sont toujours valables :

- $b^x \times b^y = b^{x+y}$

- $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$

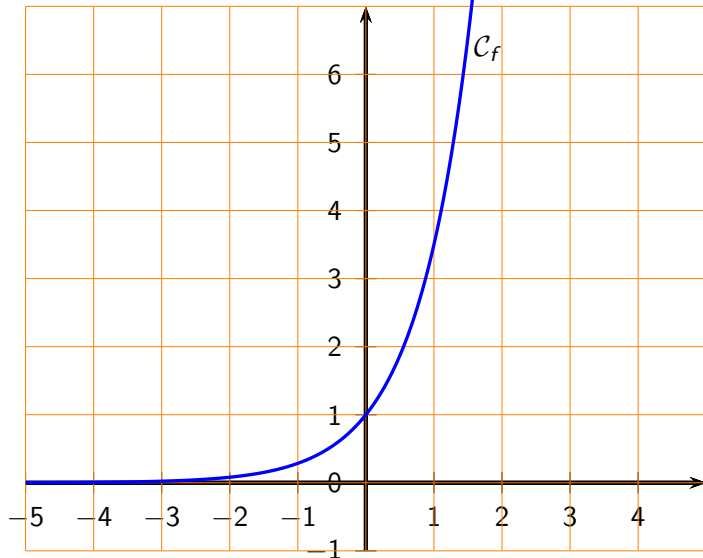
- $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

- $(b^x)^y = b^{x \times y}$

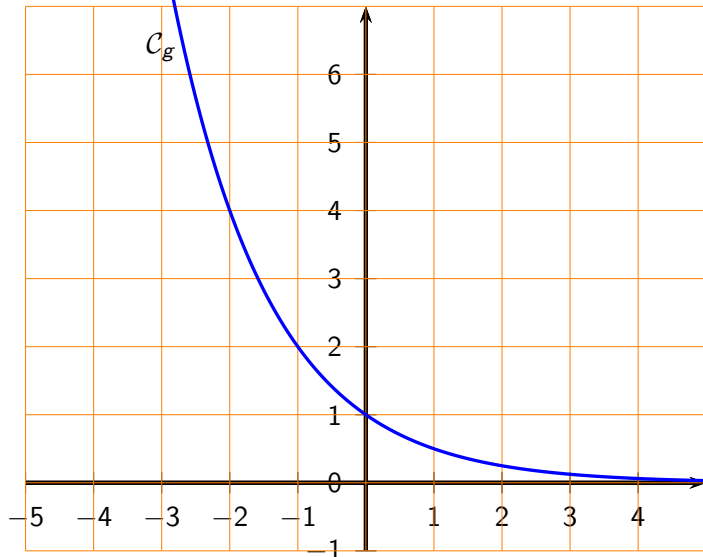
Remarque : la fonction exponentielle de base b est la fonction qui "étend" la suite géométrique $u_n = b^n$ à tous les réels, en vérifiant la propriété $b^x \times b^y = b^{x+y}$, de manière à former une fonction continue.

Remarque : pour tout $b \in \mathbb{R}$, $b^0 = 1$, donc la courbe d'une fonction exponentielle passe toujours par le point $(0, 1)$.

Croissance exponentielle : $f : x \mapsto 3.5^x$:



Décroissance exponentielle : $g : x \mapsto 0.5^x$:



On peut bien sûr résoudre graphiquement ou bien à la calculatrice une équation de type $b^x = c$ comme d'habitude.

Lorsqu'on a une équation de type $b^X = b^Y$, où l'inconnue x est dans l'exposant (dans X et/ou Y), on peut appliquer la propriété suivante :



Équation où l'inconnue est en exposant

Pour tout nombre $b > 0, b \neq 1$, l'équation $b^X = b^Y$ est équivalente à l'équation $X = Y$.

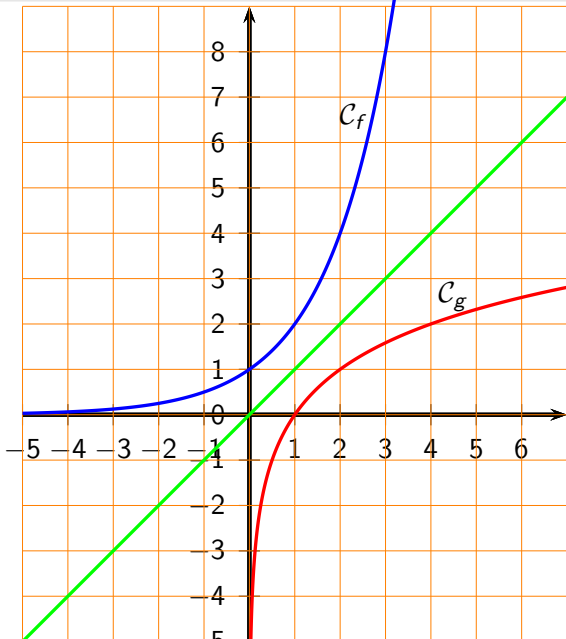
Exemple : si on veut résoudre l'équation $2^{x+1} = 8$, on reconnaît à gauche et à droite deux puissances de 2 (car $8 = 2^3$), c'est-à-dire $2^{x+1} = 2^3$, donc c'est équivalent à résoudre $x + 1 = 3$. On sait résoudre cette équation : cela donne $x = 2$.

Afin de pouvoir résoudre tout type d'équation $b^x = c$, on introduit les fonctions logarithmes.

La fonction logarithme de base b est la réciproque de la fonction exponentielle de base b . Cela veut dire que :

- $\log_b(b^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $b^{\log_b(x)} = x$ pour tout $x > 0$

Allure des courbes



Pour tout $b > 0, b \neq 1$, la fonction $g : x \mapsto \log_b(x)$ a son graphique qui est le symétrique du graphique de $f : x \mapsto b^x$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Ci-contre avec $b = 2$:

- $f(x) = 2^x$
- $g(x) = \log_2(x)$

Une base particulière : la base e

e est un nombre particulier (qui vaut $e \approx 2.718281828$).

La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction exponentielle dont la dérivée est... elle-même ! On l'appelle la fonction exponentielle, notée parfois $\exp : x \mapsto e^x$:

- $\exp'(x) = \exp(x)$, c'est-à-dire, avec la notation de la calculatrice : $\frac{de^x}{dx} = e^x$

Sa fonction réciproque, la fonction logarithme de base e, est appelée logarithme népérien ou “ln” (prononcé “elle haine”). Donc $\ln : x \mapsto \log_e(x)$.

- $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$

(Remarque hors programme : on peut écrire toute fonction exponentielle à l'aide de la fonction exponentielle : $a^b = e^{b \times \ln(a)}$)

Soit $f(x) = e^{ax+b}$



Limites

$a > 0$ (f est croissante) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$a < 0$ (f est décroissante) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(Si $a = 0$, f est la fonction constante égale à e^b , dans ce cas,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^b$$

Remarque : Si $a \neq 0$, 0 est une limite de la fonction (en $\pm\infty$) donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des X) est une asymptote à \mathcal{C}_f .



Dérivée

$$f'(x) = a \times e^{ax+b}.$$

Remarque : Dans tous les cas, se rappeler qu'une exponentielle est toujours strictement positive !

La fonction \ln

La fonction \ln est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ (car la fonction \exp ne prend que des valeurs strictement positives).



Valeurs à retenir

$\ln(e) = 1$ (car $e = e^1$) et $\ln(1) = 0$ (car $1 = e^0$).



Limites — tableau de variations

x	0	$+\infty$
Var \ln		$+\infty$
	$-\infty$	

An arrow points from $-\infty$ to $+\infty$ in the second row, indicating the increasing nature of the function.



Dérivée

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

La fonction $f(x) = \ln(ax + b)$

Ensemble de définition : il faut que $ax + b > 0$, ce qui donne :

$$\begin{array}{l} ax + b > 0 \\ \left. \begin{array}{l} ax > -b \\ \div a (a > 0) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} ax > -b \\ \div a (a < 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x < -\frac{b}{a} \\ x \in]-\infty; -\frac{b}{a}[\end{array} \end{array} \right\} \text{Intervalle} \\ \left. \begin{array}{l} x > -\frac{b}{a} \\ x \in]-\frac{b}{a}; +\infty[\end{array} \right\} \text{Intervalle} \end{array}$$



Dérivée

$$f'(x) = \frac{a}{ax + b}$$

Un exemple : la fonction $f(x) = \ln(-3x + 4)$

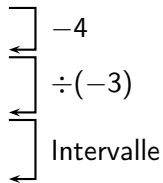
Ensemble de définition :

$$-3x + 4 > 0$$

$$-3x > -4$$

$$x < \frac{-4}{-3}$$

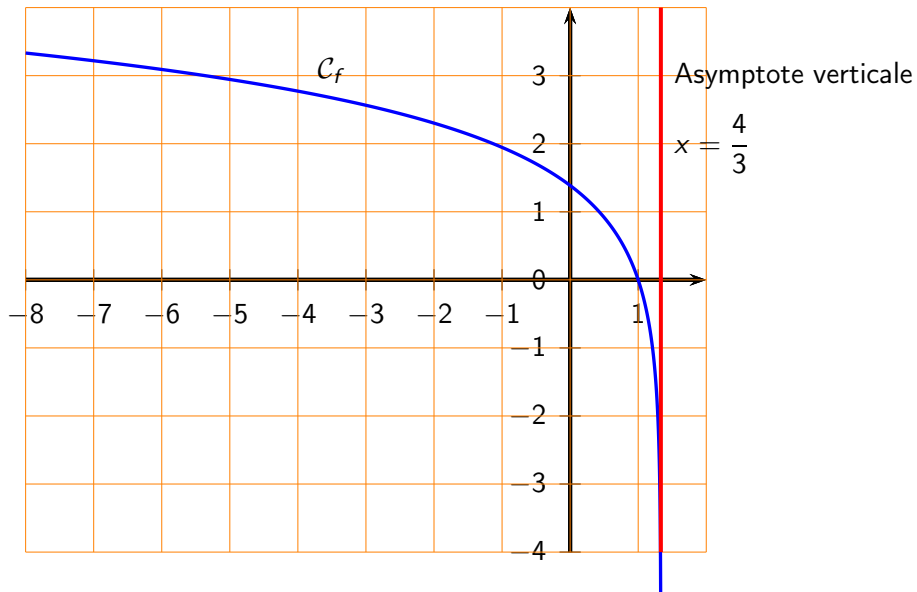
$$x \in \left] -\infty; \frac{4}{3} \right[$$



Dérivée : $f'(x) = \frac{-3}{-3x + 4}$.

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$
Sgn. -3		-
Sgn. $-3x + 4$		+
Sgn. $f'(x)$		-
Var. f	$+\infty$	$-\infty$

Un exemple : la fonction $f(x) = \ln(-3x + 4)$



Un exemple : la fonction $f(x) = \ln(2x - e)$

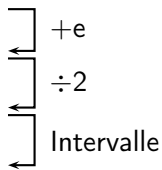
Ensemble de définition :

$$2x - e > 0$$

$$2x > e$$

$$x > \frac{e}{2}$$

$$x \in \left] \frac{e}{2}; +\infty \right[$$



Dérivée : $f'(x) = \frac{2}{2x - e}$.

x	$\frac{e}{2}$	$+\infty$
Sgn. 2		+
Sgn. $2x - e$	0	+
Sgn. $f'(x)$		+
Var. f	$-\infty$	$+\infty$

Un exemple : la fonction $f(x) = \ln(2x - e)$

