

Chapitre 3. Primitives et intégrales

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2021–2022



- Calcul de primitives
- Notion d'intégrale : méthode des rectangles, lien avec les primitives
- Calculs d'intégrales

Si f est une fonction, on note F une primitive de f . Le calcul d'une primitive de f , est l'opération inverse du calcul de dérivée.

Exemple : quand on dérive $3x$ ça donne 3 donc $f(x) = 3x$ est une primitive de $g(x) = 3$.

Remarque : quand on dérive une constante, ça fait toujours 0. Ainsi, il n'y a pas une unique fonction qui est primitive d'une fonction donnée.

Exemple : soit $f(x) = 6x + 4$. Si on dérive $g(x) = 3x^2 + 4x$, on trouve $6x + 4$, donc g est une primitive de f . Mais si on dérive $h(x) = 3x^2 + 4x + 12$, on trouve aussi $6x + 4$, donc h est une primitive de f .

Le formulaire (http://www.barsamian.am/EE_docs_officiels/S6S7_Formulaire_maths_2020-2022.pdf) donne la formule qu'il faut maîtriser dans ce chapitre :



Primitive de $f(x) = x^n$ (pour $n \geq 0$)

$$\text{Si } f(x) = x^n, \text{ alors } F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Par exemple :

- si $f(x) = x$, alors $F(x) = \frac{x^2}{2}$
- si $f(x) = x^2$, alors $F(x) = \frac{x^3}{3}$
- si $f(x) = x^3$, alors $F(x) = \frac{x^4}{4}$

Une fois qu'on a trouvé une primitive F :



Toutes les primitives

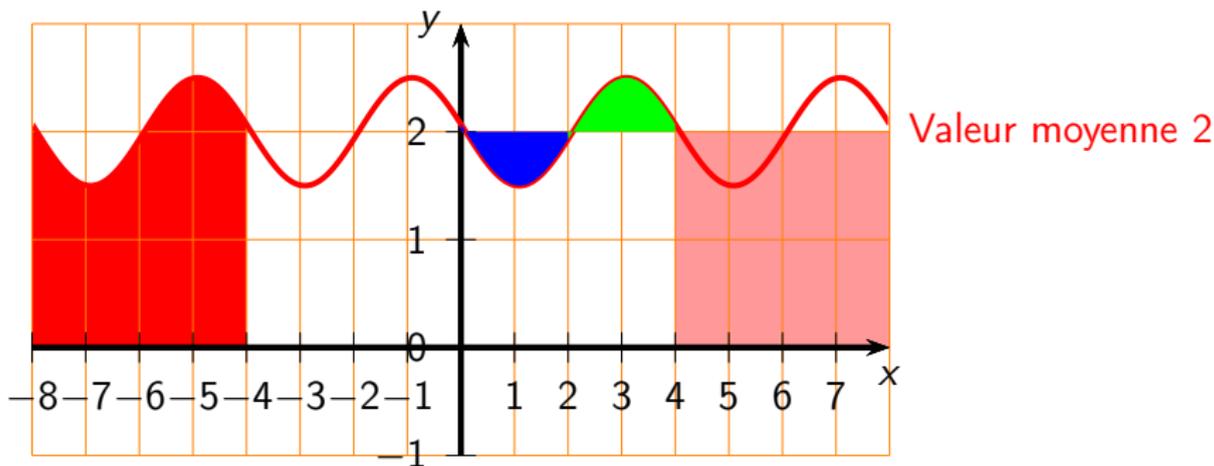
Soit f une fonction dont on connaît une primitive F . Alors toute primitive de f a pour expression $F(x) + k$ où k est une constante.

Remarque : ce résultat est plus fort que ce qu'on a vu à la page précédente : il n'y a pas d'autre primitive que les fonctions d'expression $F(x) + k$!

II/ Aire sous la courbe

On a vu l'an dernier la valeur moyenne d'une fonction périodique.

Ex. en rouge, $x \mapsto 0,5 \sin\left(\frac{2\pi}{4}x + 3\right) + 2$:

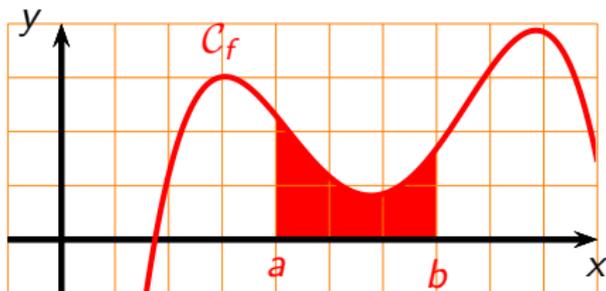


L'aire bleue et l'aire verte sont égales, donc l'aire rouge foncé (tout à gauche) qui est l'aire "sous la courbe" (pour x entre -8 et -4) est la même que l'aire rouge clair (tout à droite) qui est l'aire d'un rectangle de hauteur 2 (et de même largeur que tout à gauche : 4).

Pour calculer la valeur moyenne d'une fonction f , il faut répartir la "somme" de f de manière égale, donc trouver une fonction constante qui ait la même aire sous la courbe : il faut donc trouver un rectangle de même aire, comme à la page précédente.

Le symbole pour la "somme" d'une fonction est \int (le "S" de somme, allongé). Le calcul $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire comprise entre :

- la courbe C_f
- l'axe (Ox)
- la droite d'équation $x = a$
- la droite d'équation $x = b$



Pour le calcul de moyenne d'une fonction f (comme pour d'autres exemples), il faut donc calculer l'aire sous la courbe de f . Pour avoir un calcul approché, on peut utiliser la méthode des rectangles (voir activité 1 p.140).

Pour avoir un calcul exact, il faut utiliser le théorème suivant :



Théorème fondamental de l'analyse

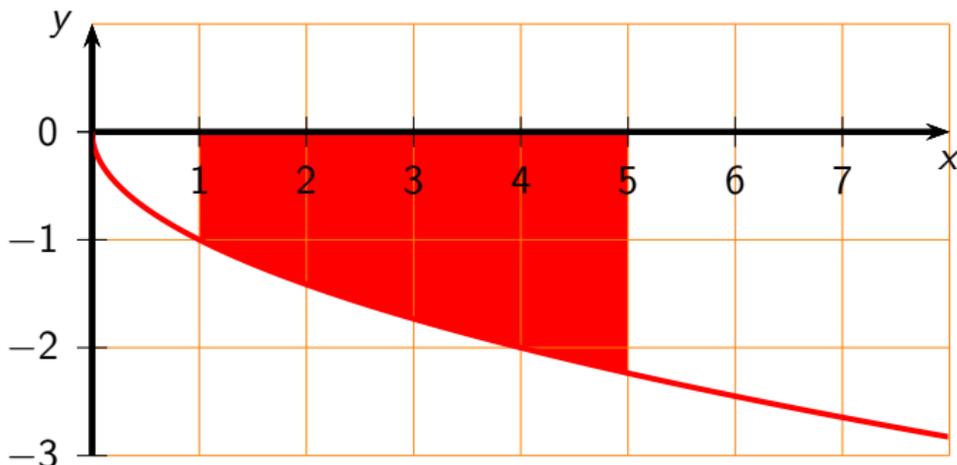
Soit f une fonction, soit a un nombre, et soit \mathcal{A} la fonction d'aire, qui à tout nombre t associe l'aire sous la courbe de f de $x = a$ à $x = t$. Alors \mathcal{A} est une primitive de f .

Ce théorème fondamental fait donc le lien entre un calcul d'aire et une primitive (on a vu un exemple avec l'activité 2 p.141 et on a vu une ébauche de démonstration en classe).

II/ Aire sous la courbe

Tout ce qu'on a vu jusqu'ici n'est valable que pour une fonction positive. Essayez de calculer à la calculatrice :

$$\int_1^5 -\sqrt{x} \, dx$$



En regardant sur le dessin, on voit que ça doit correspondre à l'opposé de l'aire rouge. Effectivement, dans ce cas, c'est l'aire "sur" la courbe (car l'axe (Ox) est au-dessus).

Et quand la fonction est à la fois positive et négative sur l'intervalle considéré, on utilise la relation de Chasles :



Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Ex. $\int_0^5 2 - \frac{x^2}{4} dx$ correspond à :

$$\int_0^{2.8} 2 - \frac{x^2}{4} dx + \int_{2.8}^5 2 - \frac{x^2}{4} dx$$

La première intégrale correspond à l'aire rouge, la seconde intégrale correspond à l'opposé de l'aire bleue.

