Chapitre 5.
Révisions probas S6

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2021–2022

- Les arbres de probabilités
- Les probabilités conditionnelles
- La loi binomiale

I/ Les arbres pondérés : 1) Définition

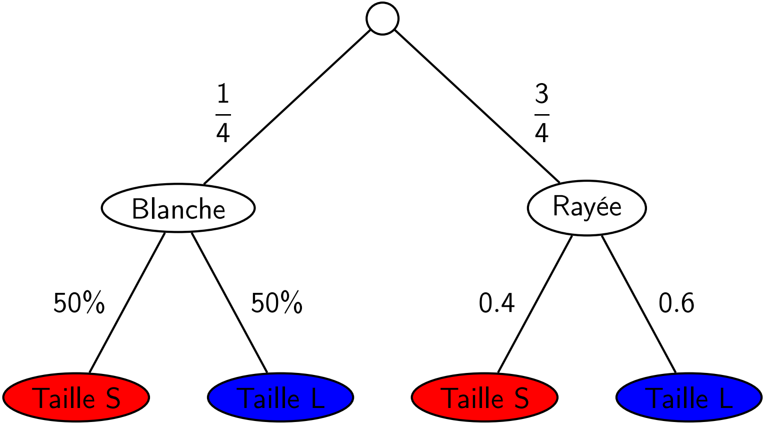
Considérons, dans une expérience aléatoire, deux événements A et B. On connaît :

- dans Ω, la probabilité de A (et donc de $\overline{A}$)
- dans A, la probabilité de B (et donc de $\overline{B}$)
- dans $\overline{A}$, la probabilité de B (et donc de $\overline{B}$)

Un <u>arbre pondéré</u> sert à modéliser toutes les issues de cette expérience aléatoire : $A \cap B$; $A \cap \overline{B}$; $\overline{A} \cap B$; $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Il est constitué de <u>noeuds</u> et de <u>branches</u> reliant ces noeuds, sur lesquelles on écrit les probabilités.

Dans un lot de chemises : $\frac{1}{4}$ de chemises blanches, le reste de rayées. Parmi les blanches, 50% de taille S et le reste de taille L. Parmi les rayées, une proportion 0.4 de taille S, le reste de taille L. On choisit au hasard une chemise dans le lot, on modélise par l'arbre suivant :



La somme des probabilités écrites sur les branches qui partent d'un noeud est égale à 1.

La probabilité d'une issue est le produit des probabilités sur les branches menant de la racine à cette issue.

ex : $P(\text{Blanche} \cap \text{Taille S}) = \frac{1}{4} \times 50\% = 0,25 \times 0,5 = 0,125$

Rappel : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent.

ex : $P(\text{Taille S}) = P(\text{Blanche} \cap \text{Taille S}) + P(\text{Rayée} \cap \text{Taille S}) = \frac{1}{4} \times 50\% + \frac{3}{4} \times 0,4 = 0,25 \times 0,5 + 0,75 \times 0,4 = 0,125 + 0,3 = 0,425$

Considérons, dans une expérience aléatoire, deux événements A et B. Si lors du résultat de l'expérience, on sait que l'événement A s'est produit, alors on a gagné de l'information pour calculer la probabilité de l'événement B : c'est ce qu'on appelle la probabilité de B sachant A, et se note $P_A(B)$ (ou $P(B|A)$).

Exemple : je tire un élève au hasard parmi ceux du secondaire à l'EEB1 (Uccle). J'étudie $A =$ "être en S7 francophone" et $B =$ "avoir M. Barsamian en professeur". Alors $P(B) \approx 0,05$ et $P_A(B) \approx 25\%$.

Remarque : cela revient à calculer la probabilité de l'événement B en se plaçant non plus dans l'univers total Ω de l'expérience mais dans l'univers restreint aux issues de A.

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B, avec $P(A) \neq 0$. Alors :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque : cette formule précédente permet également de calculer la probabilité de l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

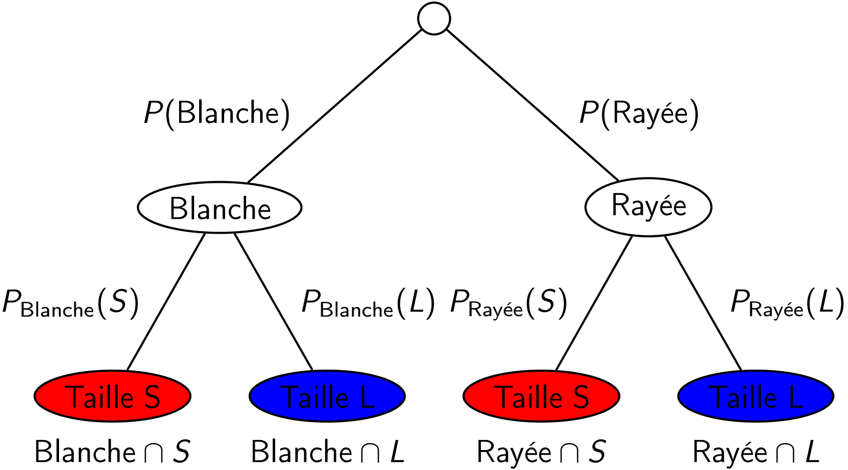
Exemple tiré du film "Le maître d'école" (avec Coluche) : sur une population de 252 habitants, chaque personne lit au moins une des deux revues suivantes : Paris-Match ou Elle. 200 personnes lisent au moins Paris-Match, 120 personnes lisent au moins Elle.

Elle \ Paris-Match	Oui	Non	Total
Oui	68	52	120
Non	132	0	132
Total	200	52	252

Probabilité qu'une personne au hasard lise Elle : $P(Elle) = \dfrac{120}{252}$

Probabilité qu'une personne au hasard lise Elle et Paris-Match : $P(Elle \cap PM) = \dfrac{68}{252}$

Probabilité qu'une personne au hasard lise Paris-Match sachant qu'elle lit Elle : $P_{Elle}(PM) = \dfrac{P(Elle \cap PM)}{P(Elle)} = \dfrac{\frac{68}{252}}{\frac{120}{252}} = \dfrac{68}{252} \times \dfrac{252}{120} = \dfrac{68}{120}$



$P(\text{Blanche})$
$P(\text{Rayée})$
Blanche
Rayée
$P_{\text{Blanche}}(S)$
$P_{\text{Blanche}}(L)$
$P_{\text{Rayée}}(S)$
$P_{\text{Rayée}}(L)$
Taille S
Taille L
Taille S
Taille L
$\text{Blanche} \cap S$
$\text{Blanche} \cap L$
$\text{Rayée} \cap S$
$\text{Rayée} \cap L$

III/ La loi binomiale : 1) Introduction

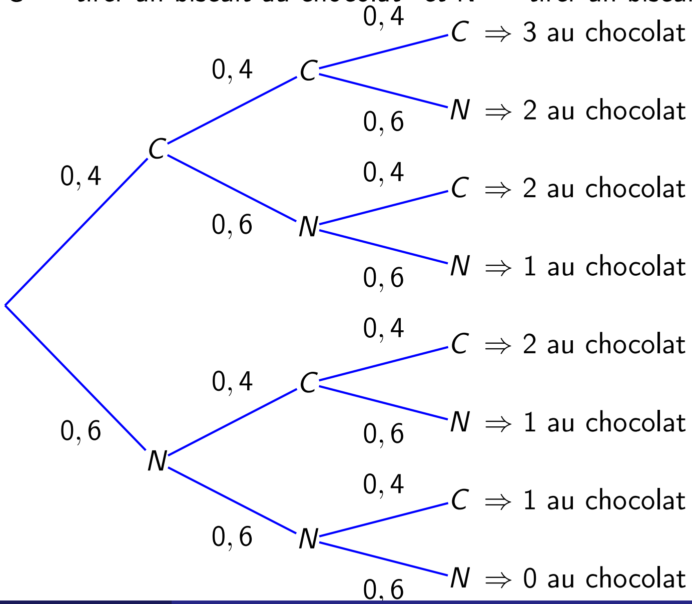
On s'intéresse maintenant à plusieurs expériences aléatoires que l'on fait à la suite. Il faut bien distinguer lorsque les expériences aléatoires sont différentes, ou lorsqu'elles sont les mêmes.

Exemple 1 : on a une boîte de 10 bonbons (8 au citron, le reste à l'orange) et on mange au hasard 3 bonbons (exercice 49, prebac 2019). Il s'agit d'un tirage sans remise, à chaque étage de l'arbre, les probabilités sont différentes (ce n'est pas une loi binomiale).

Exemple 2 : une usine fabrique des biscuits au chocolat (40% au chocolat, le reste nature) et on prend au hasard 3 biscuits (exercice 53, prebac 2018). On peut modéliser cela par un tirage avec remise (donc, mêmes probabilités à chaque tirage) car il y a tellement de biscuits qu'en prendre un ne change quasiment pas la probabilité (on peut modéliser par une loi binomiale, voir suite du diaporama).

III/ La loi binomiale : 2) À la main

C = "tirer un biscuit au chocolat" et N = "tirer un biscuit nature" :



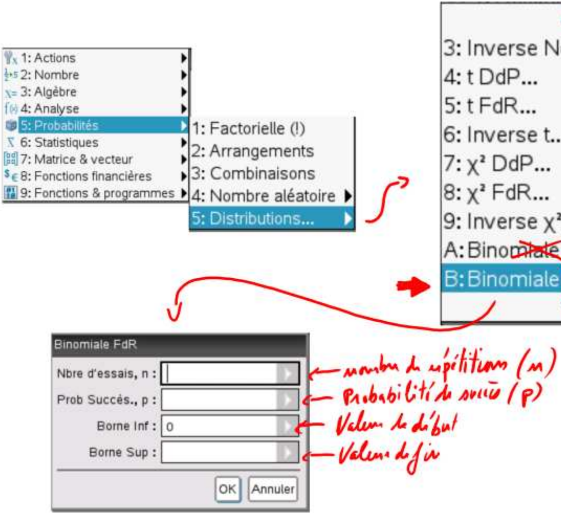
Si on note X la variable aléatoire "nombre de biscuits au chocolat tirés" et qu'on s'intéresse à l'événement "tirer 2 biscuits au chocolat", il y a 3 branches qui correspondent. Sur chaque branche, on a deux fois une arête à $0,4$ et une fois une arête à $0,6$, d'où :

$$P(X = 2) = 3 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6$$

C'est 3 car il y a 3 rangements possibles des 2 biscuits au chocolat parmi les 3 tirés. C'est le calcul des combinaisons de 2 parmi 3, qu'on écrit C_3^2. Dans le cas général, cela correspond au C_n^k du formulaire :

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

On ne demande pas de retenir la formule (elle est dans le formulaire), on demande d'être capable de savoir faire l'arbre à la main sur des petits exemples (jusqu'à 4–5 étages), ou d'utiliser la calculatrice pour le faire (voir diapo suivante).


1: Actions
2: Nombre
3: Algèbre
4: Analyse
5: Probabilités
6: Statistiques
7: Matrice & vecteur
8: Fonctions financières
9: Fonctions & programmes
1: Factorielle (!)
2: Arrangements
3: Combinaisons
4: Nombre aléatoire
5: Distributions...
3: Inverse Normale...
4: t DdP...
5: t FdR...
6: Inverse t...
7: χ² DdP...
8: χ² FdR...
9: Inverse χ²...
A: Binomiale DdP...
B: Binomiale FdR...
Binomiale FdR
Nbre d'essais, n :
Prob Succès, p :
Borne Inf : 0
Borne Sup :
OK
Annuler
nombre de répétitions (n)
Probabilité de succès (p)
Valeur de début
Valeur de fin

Ex : Pour $X \sim \mathcal{B}(3, 0{,}2)$ $\quad p(X=2)$: $0{,}096$

} paramètres de X

binomCdf(3,0.2,2,2) 0.096

Pour $X \sim \mathcal{B}(12, 0{,}3)$

$p(X \leq 5) = 0{,}882151$

binomCdf(12,0.3,0,5) 0.882151

$p(X \geq 8)$

binomCdf(12,0.3,8,12) 0.009489

Toujours pour une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{B}(12, 0.3)$: