Chapitre 8.
Compléments sur les intégrales

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2021–2022

Plan du chapitre

- Rappels sur les exponentielles et les logarithmes
- Nouvelles formules de primitives
- Nouvelles formules de calcul intégral

I/ Rappels : $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$

Dérivée

$f'(x) = a \times \mathrm{e}^{ax+b}$.

Tableau de variations :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	
Var $f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$-$	
Var $f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Ensemble de définition : il faut que $ax + b > 0$, ce qui donne :

Si $a > 0$: $x \in \left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[$ Si $a < 0$: $x \in \left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$

Dérivée

$f'(x) = \dfrac{a}{ax+b}$.

Si $a > 0$:

x	$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$	$\Vert$	$+$	
Var $f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$
Sgn. $f'(x)$		$-$	$\Vert$
Var $f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

II/ Nouvelles formules de primitives

1) On sait que si $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$, alors $f'(x) = a \times \mathrm{e}^{ax+b}$. Du coup :

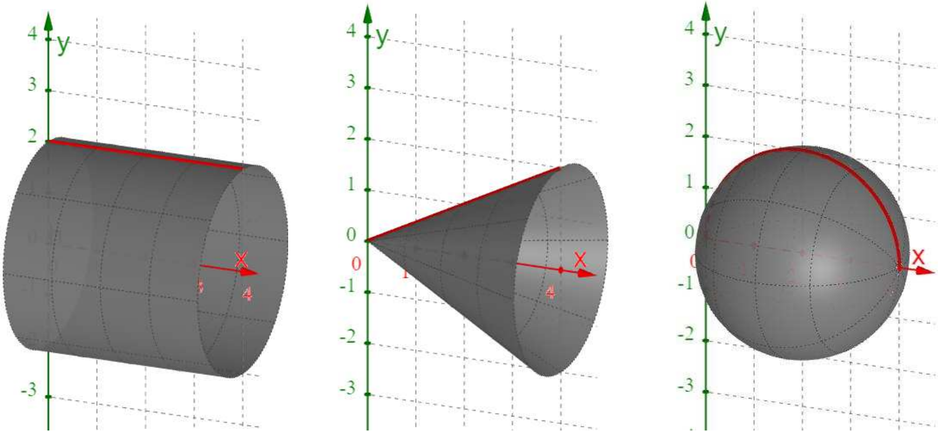
- une primitive de $g(x) = a \times \mathrm{e}^{ax+b}$ est $G(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$
- une primitive de $h(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ est $H(x) = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}$

2) On sait que si $f(x) = \ln(ax+b)$, alors $f'(x) = \dfrac{a}{ax+b}$.

⚠ Cette fois-ci pour que cela fonctionne "à l'envers", il faut que $ax+b > 0$! La formule qui fonctionne tout le temps (sauf quand $ax+b=0$ bien sûr) est :

- une primitive de $g(x) = \dfrac{a}{ax+b}$ est $G(x) = \ln(|ax+b|)$
- une primitive de $h(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ est $H(x) = \dfrac{1}{a}\ln(|ax+b|)$

1) On considère des solides qui ont un axe de symétrie. Ils peuvent être décrits par une portion de courbe de fonction $\mathcal{C}_f$ (pour des valeurs de x entre a et b), qu'on fait tourner autour de cet axe. Exemples :



III/ Nouvelles formules de calcul intégral

1) On considère une portion de courbe de fonction $\mathcal{C}_f$ (pour des valeurs de x entre a et b), qu'on fait tourner autour de l'axe des abscisses. On obtient alors un solide, et on veut calculer son volume $\mathcal{V}$. La formule est :

$$\mathcal{V} = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

2) On considère une portion de courbe $\mathcal{C}_f$ (pour des valeurs de x entre a et b), et on souhaite calculer sa longueur. La formule est :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, \mathrm{d}x$$

À la calculatrice : Menu -> Analyse -> Longueur d'arc. Par exemple pour x entre 0 et 2 :

$$\mathrm{arcLen}(f(x), x, 0, 2)$$