Devoir Surveillé n°2 du mercredi 1er décembre 2021 (Calculatrice : ✗) Correction

Exercice 1 [points : 2 + 2]

> Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive puis toutes les primitives.
> 1. $f(x) = x^3$
> 2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 12$

1. Pour $f(x) = x^3$, on applique simplement la formule du formulaire : $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ est une primitive, toutes les primitives sont de la forme $\boxed{F(x) = \dfrac{x^4}{4} + k}$.
2. Ici il faut calculer la primitive de plusieurs fonctions de référence :

$$f(x) = 2 \times x^2 - 3 \times x + 12 \times 1.$$

$$F(x) = 2 \times \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 12 \times x.$$

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 12x + k}.$$

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante k.

Exercice 2 [points : 2]

> Soit la fonction g définie par $g(x) = 3x^2 - 3x + 1$. Déterminer la primitive G de g qui vérifie la condition $G(2) = 8$.

Ici on commence par trouver toutes les primitives :

$$g(x) = 3 \times x^2 - 3 \times x + 1.$$

$$G(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + x.$$

$$\boxed{G(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + x + k}.$$

1 : Ecrire chaque terme de g comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante k.

Maintenant, il faut que G vérifie la condition $G(2) = 8$. On va donc écrire l'équation à laquelle on aboutit :

$$\begin{aligned}
G(2) &= 8 && \\
2^3 - \frac{3 \times 2^2}{2} + 2 + k &= 8 && \text{On remplace par l'expression de } G \\
8 - 6 + 2 + k &= 8 && \text{On calcule} \\
4 + k &= 8 && \text{On simplifie} \\
k &= 4 && -4
\end{aligned}$$

Ainsi la primitive cherchée est la fonction $\boxed{G(x) = x^3 - \dfrac{3x^2}{2} + x + 4}$.

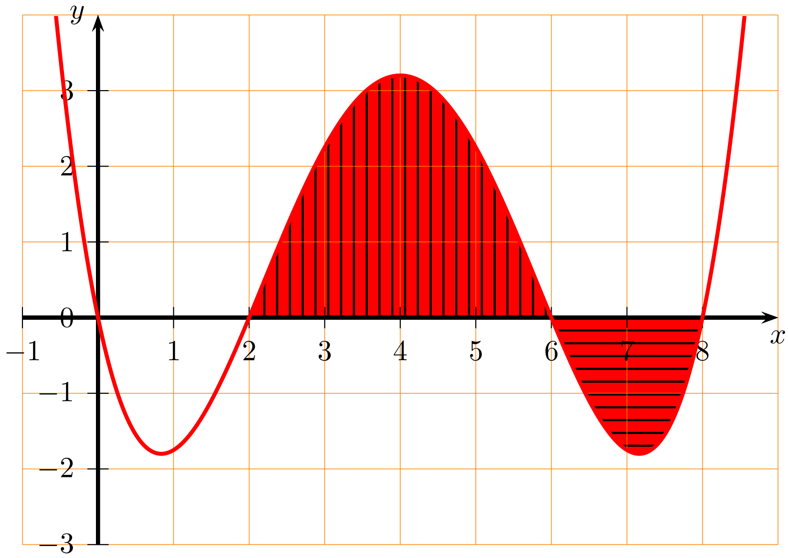
Exercice 3 [points : 2]

> On considère la fonction $h : x \mapsto 3x$. Déterminer $\displaystyle\int_{-5}^{-1} h(x)\,\mathrm{d}x$.

On peut calculer une primitive $H(x) = 3\dfrac{x^2}{2}$ puis calculer $\displaystyle\int_{-5}^{-1} h(x)\,\mathrm{d}x = H(-1) - H(-5) = \frac{3}{2}(-1)^2 - \frac{3}{2}(-5)^2 = \frac{3}{2} - \frac{75}{2} = -\frac{72}{2} = \boxed{-36}$.

Exercice 4 [points : 1 + 1]

La figure ci-dessous représente une fonction f, dont les racines sont 0, 2, 6 et 8.



1. Écrire avec des intégrales le calcul qu'il faudrait faire pour obtenir l'aire rouge. On ne demande pas de faire ce calcul.
2. En s'aidant du quadrillage, donner une valeur approchée de l'aire rouge.

1. La fonction est positive sur $[2; 6]$ donc l'aire hachurée verticalement vaut $\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$. La fonction est négative sur $[6; 8]$ donc l'aire hachurée horizontalement vaut $-\int_6^8 f(x)\,\mathrm{d}x$. Au total, l'aire rouge vaut donc $\boxed{\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_6^8 f(x)\,\mathrm{d}x}$.
2. L'aire hachurée horizontalement est à peu près égale à 3 carreaux, l'aire hachurée verticalement à peu près égale à 8 carreaux, donc a à peu près $\boxed{\text{11 carreaux}}$ en tout.

Exercice 5 — BONUS [points : 0,5]

On admet que la moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$, se calcule grâce à la formule :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On considère la fonction $g : x \mapsto x^3$. Calculer la moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0; 5]$.

On peut calculer une primitive $G(x) = \frac{x^4}{4}$ puis calculer $\frac{1}{5-0}\int_0^5 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(G(5) - G(0)) = \frac{1}{5}\left(\frac{5^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{1}{5}\frac{5^4}{4} = \frac{5^3}{4} = \frac{625}{4} = \boxed{156,25}$.

Exercice 6 — BONUS [points : 0,5]

Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x \cdot (1 + x)$.

On n'a pas de formule pour calculer des primitives de multiplication de fonctions. Ce qu'on peut faire, c'est développer d'abord : $f(x) = x + x^2$. Maintenant calculer une primitive est assez simple, c'est $F(x) = \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$.