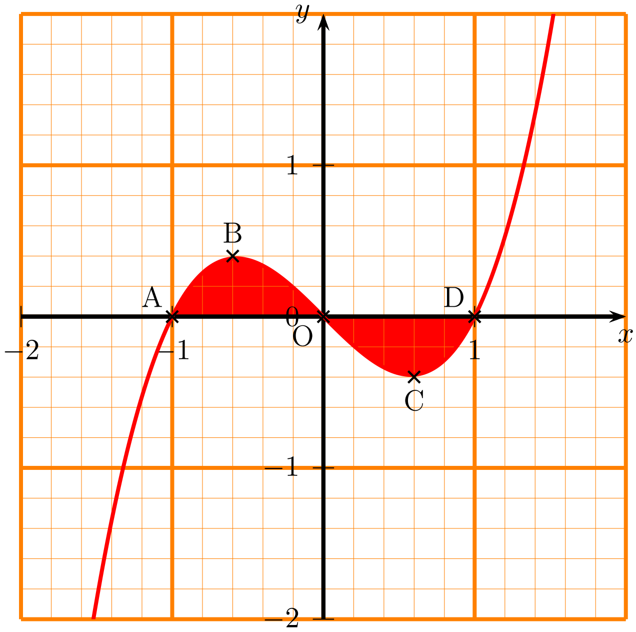
Exercice 18 du prébac

5 points	Le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x$ est donné ci-dessous :  Calculer l'aire entre le graphe de f et l'axe x des abscisses.

L'aire (en rouge, ci-dessus) peut être calculée en deux fois, car il y a deux parties : (a) à gauche, entre -1 et 0, où la fonction est positive et (b) à droite, entre 0 et 1, où la fonction est négative.

La fonction est positive sur $[-1; 0]$ donc l'aire à gauche vaut $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. La fonction est négative sur $[0; 1]$ donc l'aire à droite vaut $-\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Au total, l'aire rouge vaut donc $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour calculer cette valeur, on va donc calculer une primitive de la fonction f, pour appliquer la formule du formulaire de l'intégrale.

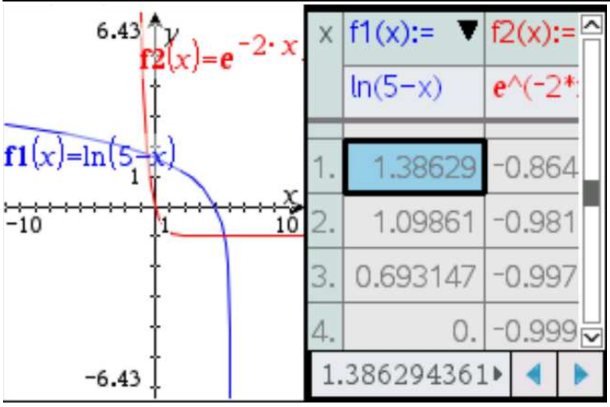
Une primitive est ici $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$.

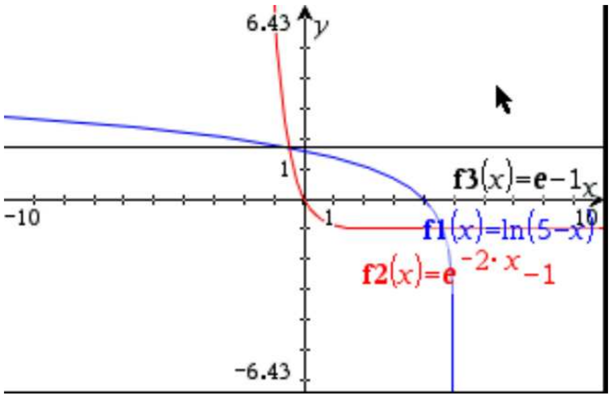
L'aire vaut donc $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = (F(0) - F(-1)) - (F(1) - F(0))$
$= \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right)\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}\right)\right) = \left(0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 0\right) =$
$\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

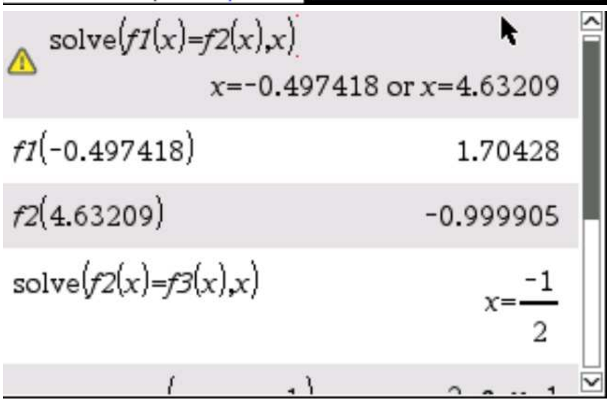
On pouvait vérifier son calcul en regardant sur le dessin une valeur approchée de l'aire : l'aire de gauche vaut approximativement l'aire du triangle OAB, soit $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{0,4 \times 1}{2} = 0,2$. L'aire de droite vaut également environ $0,2$ (aire du triangle OCD), donc on trouve bien une aire approchée de $0,4$ ce qui est cohérent avec la valeur $0,5$ qu'on a trouvée par le calcul.

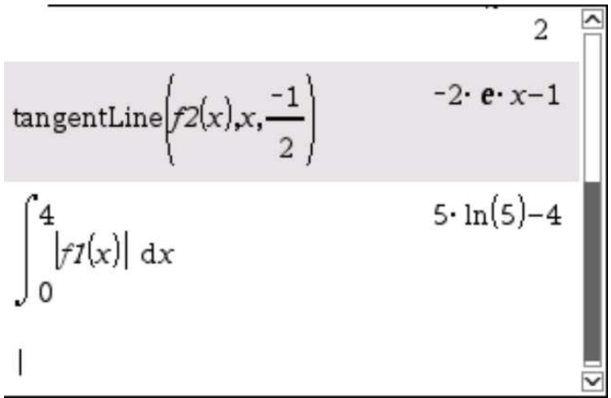
Exercice 13 du prébac (il y avait une imprécision à la question 4, j'ai mis à jour l'énoncé)

	Étant données les fonctions : $f(x) = \ln(5-x)$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-2x} - 1$
2 points	1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre les graphes de f et g.
2 points	2. Esquissez les graphes des deux fonctions dans le même repère.
3 points	3. Déterminer l'équation de la droite tangente au graphe de g à son point d'intersection avec la droite d'équation : $y = \mathrm{e} - 1$ en montrant tous les calculs.
3 points	4. Calculer l'aire de la région délimitée entre le graphe de la fonction f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.









1. On rentre $f1(x) = \ln(5-x)$ et $f2(x) = \mathrm{e}^{-2x} - 1$ dans le menu graphique de la calculatrice. Pour trouver les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on va dans la fenêtre de calculs associée, on tape solve$(f1(x) = f2(x), x)$. La calculatrice nous répond que c'est en $x \approx -0{,}497418$ et $x \approx 4{,}63209$.

   Maintenant on a les abscisses des points d'intersection, mais pas les coordonnées complètes. Il faut calculer l'image de ces nombres. La calculatrice donne $f(-0{,}497418) \approx 1{,}70428$ et $f(4{,}63209) \approx -0{,}999905$. Les points d'intersection ont donc pour coordonnées $\boxed{(-0{,}497418; 1{,}70428) \text{ et } (4{,}63209; -0{,}999905)}$.
2. On revient dans le menu graphique, on appuie sur Ctrl + T pour avoir le tableau de valeurs pour recopier le graphique.
3. Ici il faut d'abord trouver le point d'intersection entre le graphique de g et la droite qu'on donne. On commence donc par retourner dans l'outil graphique pour rajouter $f3(x) = \mathrm{e} - 1$.

   On trouve l'abscisse de l'intersection avec solve$(f2(x) = f3(x), x)$ qui nous donne $x = -\dfrac{1}{2}$.

   Maintenant on peut soit utiliser directement l'outil tangentLine de la calculatrice, soit appliquer la formule de l'équation de la tangente au point d'abscisse a, pour $a = -\dfrac{1}{2}$:

   $$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

   Ici, la calculatrice donne, pour tangenline$(f2(x), x, -1/2)$, l'équation $\boxed{y = -2 \cdot \mathrm{e} \cdot x - 1}$.
4. Ici, l'aire à calculer entre la courbe de f et l'axe des abscisses se trouve entre $x = 0$ et $x = 4$. Donc, on peut simplement taper à la calculatrice :
   $\displaystyle\int_0^4 |f1(x)| dx = \boxed{5\ln(5) - 4}$.