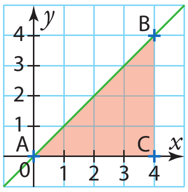
1 Évaluer l'intégrale d'une fonction continue positive

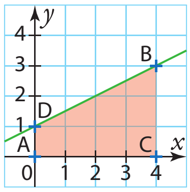
A ▸ Aire sous la courbe d'une fonction

Dans chacun des cas, donner la valeur de l'aire sous chacune des courbes entre les abscisses 0 et 4, en unités d'aire.

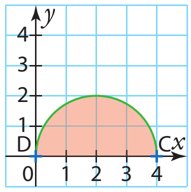
a) $f(x) = x$



b) $f(x) = 0{,}5x + 1$

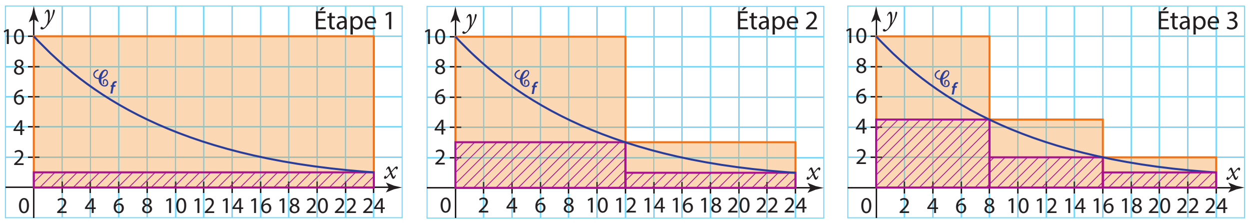


c) $f(x) = \sqrt{4 - (x-2)^2}$



B ▸ Approximation de l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles

On considère la fonction f définie sur $[0\,;24]$ par $-x\ln\left(\frac{9}{24}\right) + \ln(10)$ représentée en bleu ci-dessous. Pour estimer l'aire $\mathscr{A}$ sous la courbe de f entre 0 et 24, on découpe l'aire de deux manières différentes.



1. Proposer un schéma de l'étape 4 puis décrire la construction des rectangles.

2. On note U_n la somme des aires des rectangles hachurés et V_n la somme des aires des rectangles colorés à l'étape n. On a donc $U_1 = 24 \times f(24)$ et $V_1 = 24 \times f(0)$. Exprimer U_2 et V_2 en fonction de f, puis U_3 et V_3.

3. L'intervalle $[0\,;24]$ est maintenant découpé en 12. Comment pensez-vous que les deux suites (U_n) et (V_n) évoluent ? Et si le découpage augmente, que se passe-t-il ?

4. Proposer un programme **Python** permettant de déterminer U_n et V_n. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\mapsto\infty} U_n$ et $\lim\limits_{x\mapsto\infty} V_n$?

Remarque Ce nombre, correspondant à l'aire $\mathscr{A}$, se note $\int_0^{24} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C ▸ Déterminer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles

On considère la fonction $g(x) = x^2$ sur $[0\,;1]$ et les suites (U_n) et (V_n) représentant les suites des sommes des rectangles définis comme précédemment.

1. Modifier le programme **Python** pour proposer une valeur approchée de $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a) Exprimer U_1 et V_1 en fonction de g, puis U_2 et V_2 et enfin U_3 et V_3.

b) Démontrer que $U_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}$. En déduire que $U_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

c) Démontrer que $V_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$. En déduire que $V_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

3. Justifier l'encadrement $U_n \leqslant \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \leqslant V_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Déterminer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ en appliquant l'encadrement avec n très grand.

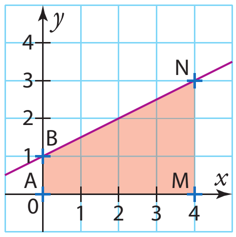
↪ Cours 1 p. 142

20 min

2 Relier les notions d'intégrale et de primitive

A ▸ Intégrale d'une fonction affine

On considère la fonction $f(t) = \frac{2}{3}t + 2$ sur $\mathbb{R}^+$. M est un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(t\,;0)$ et N le point de la courbe de f d'abscisse t.



1. Montrer que l'aire $\mathcal{A}(t)$ du trapèze AMNB est égale à $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{3}t^2 + 3t$.

2. Exprimer à l'aide d'une intégrale cette aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et t.

3. Calculer la dérivée de la fonction $\mathcal{A}$. Quel lien peut-on faire entre la fonction f et $\mathcal{A}$?

B ▸ Intégrale de la fonction racine carrée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \sqrt{t}$ et dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}$. Soit un réel $x > 0$, on désigne par $\mathcal{S}_x$ la surface sous $\mathcal{C}$ pour $0 \leqslant t \leqslant x$. On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la surface $\mathcal{S}_x$.

1. Justifier la notation $\mathcal{A}(x) = \int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit h un nombre réel tel que $x + h \in \mathbb{R}_+$.

a) Si $h > 0$, représenter l'allure de $\mathcal{C}$ ainsi que la surface d'aire $\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)$.

b) En encadrant cette aire, démontrer que $\sqrt{x} \leqslant \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leqslant \sqrt{x+h}$.

c) Déterminer de même un encadrement de $\frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h}$ lorsque $h < 0$.

3. Démontrer que $x \mapsto \mathcal{A}(x)$ est dérivable pour tout $x > 0$ et en donner la fonction dérivée.

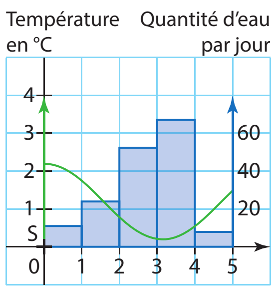
Que peut-on alors dire de la fonction $x \mapsto \int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$?

↪ Cours 2 p. 144

15 min

3 Valeurs moyenne d'une fonction

Pendant ses vacances dans une station de ski, Sam relève la quantité d'eau qui est tombée ainsi que les températures grâce à une station météo qui affiche le graphique suivant.



1. Voici le relevé des quantités d'eau de pluie par jour.

Jour	1	2	3	4	5
Quantité d'eau en mm	12	24	52	64	8

a) Quelle est la valeur moyenne de cette série ?

b) Donner l'interprétation géométrique de la valeur moyenne.

2. La courbe des températures est modélisée par la fonction f définie par $1{,}2 + \cos(x)$ sur $[0\,;5]$.

a) Exprimer l'aire sous la courbe.

b) Quelle est la hauteur du rectangle de longueur 5 qui a la même aire que celle sous la courbe ? Par extension, ce nombre est la valeur moyenne de la fonction f sur $[0\,;5]$.

↪ Cours 2 c p. 146