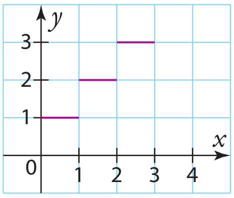
Exercices d'application

Déterminer une intégrale par calcul d'aire

Méthode 1 p. 143

28 On considère la fonction f affine par morceaux représentée ci-dessous.



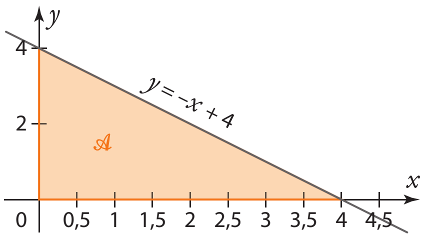
1. Calculer l'aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et 3.

2. On considère la fonction g définie sur $[0,3]$ par $g(x) = f(x) + 2$. Calculer l'aire sous la courbe de la fonction g entre 0 et 3.

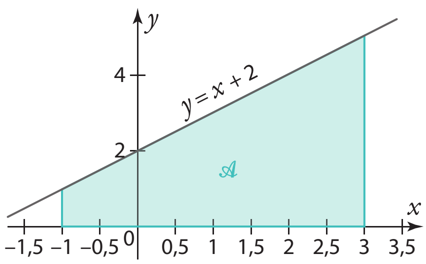
29 Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère le point A sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ et d'abscisse 2 ainsi que le point B sur la droite d'équation $y = 2x$ et d'abscisse 3.

Déterminer l'aire du triangle OAB.

30 Calculer $\int_0^4 (-x+4)\,dx$.



31 Calculer $\int_{-1}^3 (x+2)\,dx$.



32 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 x\,dx$ **b)** $\int_1^3 (2t+1)\,dt$ **c)** $\int_2^4 (-y+3)\,dy$

33 Calculer l'aire sous la courbe des fonctions suivantes sur $[0\,;3]$.

a) $x \mapsto x$. **b)** $x \mapsto 2$. **c)** $x \mapsto -x+3$.

Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

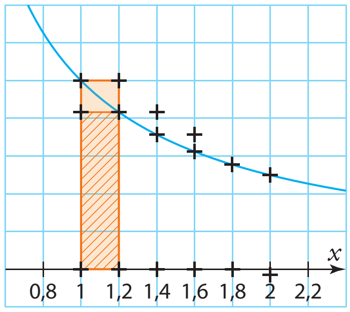
Méthode 2 p. 143

34 On considère la fonction inverse sur $[1\,;2]$.

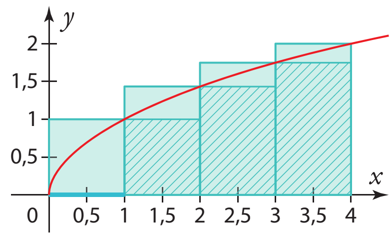
1. On partage l'intervalle $[1\,;2]$ en cinq intervalles de même amplitude. Quelle est la longueur d'un intervalle ?

2. Quelle est l'aire du rectangle coloré en rouge ? Quelle est l'aire du rectangle hachuré ?

3. En considérant deux séries de rectangles, déterminer un encadrement de l'aire sous la courbe de la fonction inverse sur $[1\,;2]$.



35 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ a été encadré par deux séries de quatre rectangles de base 1 comme sur le graphique ci-dessous.



Estimer $\int_0^4 f(x)\,dx$.

36 **1.** Tracer l'allure de la courbe de la fonction logarithme sur l'intervalle $[5\,;10]$.

2. En partageant $[5\,;10]$ en dix intervalles de même amplitude, déterminer un encadrement de $\int_5^{10} \ln(t)\,dt$.

Calculs d'intégrales avec les primitives des fonctions usuelles

Méthode 3 p. 145

37 Déterminer les valeurs des intégrales utilisant des fonctions usuelles suivantes.

a) $\int_0^4 (t-3)\,dx$ **b)** $\int_0^{11} (1-x)\,dx$

c) $\int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx$ **d)** $\int_{-1}^4 (2t^3-3t^2-4t+2)\,dt$

38 Déterminer les valeurs des intégrales utilisant des fonctions usuelles suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{1-2x}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$

39 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2+2}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 x(2-x^2)^3\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} t(t^2-1)\,\mathrm{d}t$ **d)** $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\mathrm{d}x$

40 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_4^{15} \frac{3}{x-4}\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ **d)** $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$

Utiliser la relation de Chasles

Méthode 4 p. 145

41 On considère la fonction f définie sur $[-1\,;4]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1;2] \\ -t+3 & \text{si } t \in]2;3] \\ t+3 & \text{si } t \in]3;4] \end{cases}$$

Calculer alors $\displaystyle\int_{-1}^4 f(t)\,\mathrm{d}t$.

42 On considère la fonction g définie sur $[-6\,;6]$ de période égale à 2. Sur $[-1\,;1]$, la fonction g est égale à $|x|$.

1. Construire la courbe représentative de g sur $[-5\,;5]$.

2. Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

3. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_{-6}^6 g(t)\,\mathrm{d}t$.

43 Soit f définie sur $[0\,;3]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{-x+3}{1} & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

Calculer l'intégrale de f sur son intervalle de définition.

Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

Méthode 5 p. 147

44 Soit la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$f : x \mapsto x^2 + 3$$

1. Déterminer la valeur moyenne sur l'intervalle de définition.

2. Interpréter le résultat de manière géométrique.

45 Soit la fonction définie sur $[\mathrm{e}\,;4]$ par :

$$g : x \mapsto \frac{x}{(x^2-3)}.$$

1. Déterminer la valeur moyenne sur $[\mathrm{e}\,;4]$.

2. Interpréter le résultat de manière géométrique.

46 Calculer $\displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$ sachant que la valeur moyenne de g sur $[1\,;3]$ est égale à $\ln(2)$.

47 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ sachant que la valeur moyenne de f sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ est égale à $\frac{2}{\pi}$ et que la fonction f est paire.

48 Donner l'expression de la valeur moyenne de toute fonction linéaire sur un segment $[a\,;b]$.

Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

Méthode 6 p. 147

49 **1.** Représenter dans un repère orthogonal, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1$.

2. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. **b)** $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer le signe de f sur $[-2\,;3]$.

4. Déterminer l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre -2 et 1.

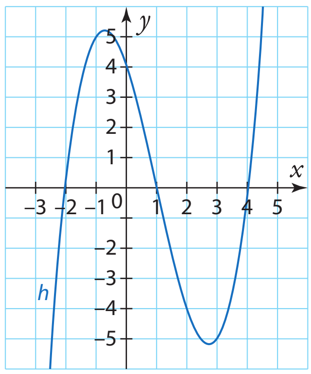
5. Déterminer l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre -2 et 3.

50 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 0{,}5(x+2)(x-1)(x-4)$ dont une représentation est donnée ci-contre.

1. Déterminer le signe de h sur $[-2\,;4]$.

2. Déterminer l'aire entre la courbe de h et l'axe des abscisses entre 1 et 4.

3. Déterminer l'aire entre la courbe de h et l'axe des abscisses entre -3 et 4.



51 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}.$$

1. Déterminer le signe de f sur $[-5\,;6]$.

2. Déterminer l'aire sous la courbe de f et l'axe des abscisses entre -5 et 6.

3. Calculer $\displaystyle\int_{-5}^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Comparer les résultats des questions **2.** et **3.**.

Exercices d'entraînement

Calculs d'intégrales

52 Soit f et g les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x) \quad \text{et } g(x) = x\ln(x) - x.$$

1. Calculer $g'(x)$. déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $\int_1^e f(x)\,dx$.

53 **1.** En remarquant que $x = x + 1 - 1$, déterminer deux réels a et b tel que $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$.

2. Montrer que $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = 1 - \ln(2)$.

54 **1.** Montrer que $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

55 On considère la fonction f définie sur $]3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$.

2. Calculer $\int_4^5 f(x)\,dx$.

56 On définit sur $[0 ; 1]$ la fonction C par :

$$C(x) = \sqrt{2x - x^2} + 1.$$

On munit le plan d'un repère orthonormé dans lequel $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de C et on considère le point I(1 ;1).
1. Justifier que C est positive sur $[0 ; 1]$.
2. Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}$. Démontrer que la distance IM est constante et égale à 1. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}$?
3. En déduire la valeur de $\int_0^1 C(t)\,dt$.

Aire sous la courbe

57 On considère la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0 ; 1] \\ \frac{1}{t} \text{ si } t \in [1,3] \end{cases}$$

Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses entre 0 et 3.

58 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Déterminer le signe de f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite (u_n) par $u_n = \int_0^n f(t)\,dt$.
a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.
b) Déterminer u_n en fonction de n.

59 On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + x - 2$.
Déterminer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre -1 et $1{,}5$.

60 On considère la fonction : $x \mapsto \frac{-4}{(x+2)^2}$.
Déterminer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre -1 et 1.

61 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2} \text{ si } x \leqslant 2 \\ e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

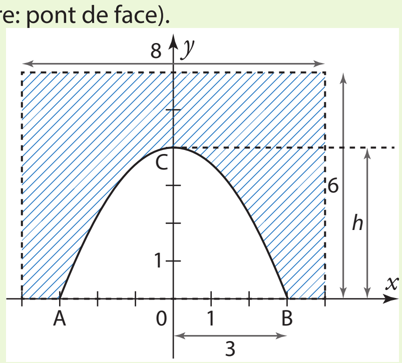
1. Vérifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^4 f(x)\,dx$.

62 On considère la fonction $f : x \mapsto |x^2 + x - 2|$.
1. Déterminer le signe de $x^2 + x - 2$ en fonction de x.
2. En déduire une expression de $I = \int_{-3}^2 f(x)\,dx$ comme somme de trois intégrales.
3. Calculer I et $J = \int_{-3}^2 (x^2 + x - 2)\,dx$. Comparer I et J.

63 Démo

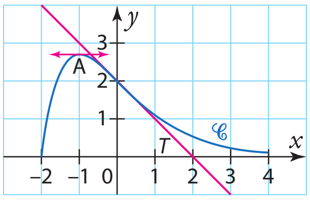
Une autoroute doit traverser une voie ferrée. Une entreprise est chargée de construire un pont par-dessus la voie ferrée pour laisser passer l'autoroute.
La longueur totale du pont est de 8 m; sa hauteur de 6 m (voir figure: pont de face).



L'ouverture est limitée par un arc de parabole de hauteur $h = 4$ m et d'axe de symétrie (Oy).
Les points A et B sont tels que OA = OB = 3 m.
Pour des raisons de sécurité, l'aire de l'ouverture doit être inférieure ou égale au tiers de l'aire totale de la façade.
1. On considère le repère orthonormé d'axes (Ox) et (Oy) où 1 cm représente 1 m.
Une équation de la parabole dans ce repère est de la forme: $y = ax^2 + c$.
Déterminer c, puis a.
2. Déterminer l'aire de l'ouverture déterminée par l'arc de parabole.
3. Vérifier que cette ouverture correspond aux normes du cahier des charges exposées dans l'énoncé.

D'après Bac pro Travaux publics 1993

64 On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$. On nomme A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1 et B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.



• La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2\ ;-1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;4]$.
• La tangente à $\mathscr{C}$ au point A est horizontale.
• La droite T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point B et a pour équation $y = -x + 2$.

A ▶ 1. a) Donner la valeur de $f'(-1)$.
b) Déterminer le signe de $f'(2)$.
c) Interpréter graphiquement $f'(0)$, puis donner sa valeur.
2. Encadrer, avec deux entiers consécutifs, l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ exprimée en unité d'aire.

B ▶ La fonction f de la partie **A** a pour expression :

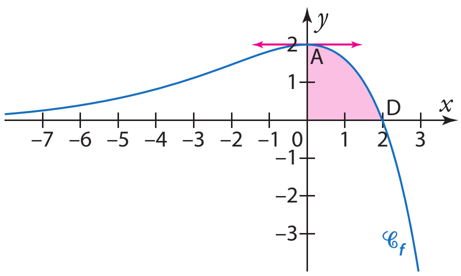
$$f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.
2. Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;4]$.
3. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[-2\ ;4]$ par $F(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f.
4. a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.
b) Vérifier la cohérence de ce résultat avec celui de la question **2.** de la partie **A**.

65 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x + 2)\mathrm{e}^{0,5x}$$

dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.



1. À l'aide de la figure, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}$ est comprise entre 2 et 4.
2. a) On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = (-2x + 8)\mathrm{e}^{0,5x}$
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer la valeur exacte de $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

D'après Bac ES Amérique du Nord 2013

Fonction définie par une intégrale

66 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(x) = \int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-t^2})\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier le signe de la fonction en fonction de x sur cet intervalle.

67 Déterminer les variations de F, définie sur $[0\ ;1]$ par :

$$F(x) = \int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t\ .$$

Aire d'un domaine entre deux courbes

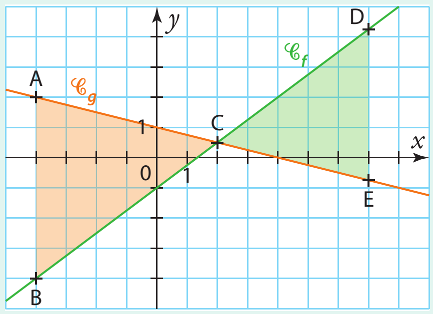
Méthode 7 p. 148

Thème 4

68 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 1 \text{ et } g(x) = -\frac{1}{4}x + 1.$$

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions ont été tracées sur la figure suivante.

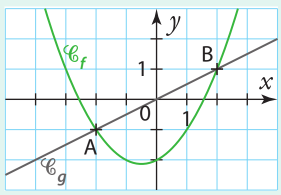


1. Résoudre $f(x) > g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.
2. Déterminer l'aire entre les deux droites représentant les deux fonctions entre 2 et 7.

69 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \quad \text{et } g(x) = 0,5x.$$

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions ont été tracées sur la figure suivante.



1. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection A et B des deux courbes.
2. Résoudre $f(x) < g(x)$.
2. Déterminer l'aire entre les deux courbes entre l'abscisse de A et l'abscisse de B.