Exercice 1

1. Pour résoudre $2^{4x+3} = 4^{x-1}$, on écrit les deux expressions comme puissance d'un même nombre, car deux puissances d'un même nombre sont égales si et seulement si les exposants sont égaux. Ici, on voit que $4 = 2^2$, donc $4^{x-1} = \left(2^2\right)^{x-1} = 2^{2\times(x-1)}$. Ainsi, on peut réécrire l'équation :
$$\begin{array}{rcll} 2^{4x+3} & = & 2^{2\times(x-1)} & \text{Exposants égaux} \\ 4x+3 & = & 2\times(x-1) & \text{Simplification} \\ 4x+3 & = & 2x-2 & -2x \\ 2x+3 & = & -2 & -3 \\ 2x & = & -5 & \div 2 \\ x & = & -2,5 & \end{array}$$
$\boxed{\mathcal{S} = \{-2,5\}}$.

2. Pour résoudre $4^{2x+1} = 16$, on remarque également que $16 = 4^2$ donc on obtient :
$$\begin{array}{rcll} 4^{2x+1} & = & 4^2 & \text{Exposants égaux} \\ 2x+1 & = & 2 & -1 \\ 2x & = & 1 & \div 2 \\ x & = & 0,5 & \end{array}$$
$\boxed{\mathcal{S} = \{0,5\}}$.

3. Pour résoudre $\ln(x+2) = 3$, on utilise la fonction exponentielle :
$$\begin{array}{rcll} \ln(x+2) & = & 3 & \text{Exponentielle} \\ \mathrm{e}^{\ln(x+2)} & = & \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^{\ln(a)} = a \\ x+2 & = & \mathrm{e}^3 & -2 \\ x & = & \mathrm{e}^3 - 2 & \end{array}$$
On vérifie maintenant que la solution est bien dans l'ensemble de définition : $\ln(x+2)$ est définie quand $x+2 > 0$ (c'est-à-dire $x > -2$, sur $]-2;+\infty[$). La solution est bien dans cet ensemble car $\mathrm{e}^3 - 2 \approx 18$.
$\boxed{\mathcal{S} = \{\mathrm{e}^3 - 2\}}$.

4. De la même manière :
$$\begin{array}{rcll} \ln(x) & = & \ln(3x+1) & \text{Exponentielle} \\ \mathrm{e}^{\ln(x)} & = & \mathrm{e}^{\ln(3x+1)} & \mathrm{e}^{\ln(a)} = a \\ x & = & 3x+1 & -x \\ 0 & = & 2x+1 & -1 \\ -1 & = & 2x & \div 2 \\ -0,5 & = & x & \end{array}$$
On vérifie maintenant que la solution est bien dans l'ensemble de définition : $\ln(x)$ est définie sur $]0;+\infty[$ et $\ln(3x+1)$ est définie quand $3x+1 > 0$ (c'est-à-dire $x > -\frac{1}{3}$, sur $]-\frac{1}{3};+\infty[$). La solution n'est pas dans le premier ensemble (ni le second) donc la solution trouvée n'est pas valable.
$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

Exercice 2

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en un point d'abscisse a est $y = f'(a)\times(x-a) + f(a)$. Il nous faut donc calculer $f(0)$ et $f'(0)$. La fonction f est une fonction de référence de type e^{ax+b} (dont la dérivée est $a\times\mathrm{e}^{ax+b}$), sa dérivée est donc directement $f'(x) = 2\times\mathrm{e}^{2x-1}$.

On calcule $f(0) = \mathrm{e}^{2\times 0-1} = \mathrm{e}^{-1}$ et $f'(0) = 2\times\mathrm{e}^{2\times 0-1} = 2\times\mathrm{e}^{-1}$.

Ainsi l'équation demandée est $y = 2\times\mathrm{e}^{-1}\times(x-0) + \mathrm{e}^{-1}$ c'est-à-dire $\boxed{y = 2\times\mathrm{e}^{-1}\times x + \mathrm{e}^{-1}}$.

Exercice 3

1. Il s'agit ici de trouver les deux inconnues a et b, pour cela on va donc se servir de l'expression $g(t) = \ln(at+1) - t + b$ et des deux données $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.
   Utilisons $g(0) = 1$. Or $g(0) = \ln(a\times 0+1) - 0 + b = \ln(1) + b = 0 + b = b$, donc $\boxed{b = 1}$.
   Pour utiliser $g'(0) = 2$, il faut donc connaître la dérivée de g.

$g(t) = \ln(at+1) - t + 1.$

$g'(t) = \dfrac{a}{at+1} - 1 - 0.$

$g'(t) = \dfrac{a}{at+1} - 1.$

1 : Ecrire chaque terme de g comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dériver : dans chaque terme garder la constante et dériver la fonction de référence.

3 : Simplifier.

   Utilisons maintenant $g'(0) = 2$. Or $g'(0) = \dfrac{a}{a\times 0+1} - 1 = \dfrac{a}{1} - 1 = a - 1$, donc $\boxed{a = 3}$.

2. (a) La fonction g se rapporte au taux de glucose en fonction du temps t en heures, il faut donc convertir 15 minutes en heures, cela fait $\dfrac{1}{4}$ d'heure. On doit donc calculer :

$g(0,25) = \ln(3 \times 0,25 + 1) - 0,25 + 1 = \boxed{\ln(1,75) + 0,75} \approx 1,31.$

(b) On a déjà effectué le calcul tout à l'heure, en remplaçant par les valeurs de a et b, cela donne $\boxed{g'(t) = \dfrac{3}{3t+1} - 1}$. Bien sûr, on peut taper à la calculatrice :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln(3t+1) - t + 1)$$

(c) Afin de dresser le tableau de variations de la fonction g, il faut dresser le tableau de signes de g'. Il nous faut donc dresser le tableau de signes de $\dfrac{3}{3t+1} - 1$. Or ce n'est ni un produit, ni un quotient, ni une fonction dont on sait donner le signe directement. On va donc tout mettre sur le même dénominateur pour étudier le signe :
$g'(t) = \dfrac{3}{3t+1} - 1 = \dfrac{3}{3t+1} - \dfrac{3t+1}{3t+1} = \dfrac{3-(3t+1)}{3t+1} = \dfrac{3-3t-1}{3t+1} = \dfrac{2-3t}{3t+1}.$
On peut maintenant étudier le signe de g', car c'est le signe d'un quotient (règle des signes). On va donc étudier le signe du numérateur et du dénominateur :

Le signe de $2-3t$:

$$\begin{aligned} 2 - 3t &> 0 \quad \text{+3t} \\ 2 &> 3t \quad \div 3 \\ \frac{2}{3} &> t \end{aligned}$$

Le signe de $3t+1$:

$$\begin{aligned} 3t + 1 &> 0 \quad -1 \\ 3t &> -1 \quad \div 3 \\ t &> -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

On travaille sur $[0;3]$, et sur cet intervalle, $t > -\dfrac{1}{3}$ est toujours vrai.

t	0		$\frac{2}{3}$		3
Sgn. $2-3t$		$+$	0	$-$	
Sgn. $3t+1$		$+$		$+$	
Sgn. $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Var. g	1	$\nearrow$	$\ln(3) + \frac{1}{3} \approx 1,43$	$\searrow$	$\ln(10) - 2 \approx 0,30$

Bien sûr, on pouvait taper à la calculatrice, pour avoir le signe de g' :

$$solve\left(\frac{3}{3t+1} - 1 > 0, t\right)$$

(d) La glycémie est maximale à $t = \boxed{\dfrac{2}{3}}$ (c'est-à-dire 40 minutes). Cette glycémie vaut $g\left(\dfrac{2}{3}\right) = \ln\left(3 \times \dfrac{2}{3} + 1\right) - \dfrac{2}{3} + 1 = \ln(2+1) - \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3} = \ln(3) + \dfrac{1}{3} \approx 1,43$. La glycémie maximale est donc de $\boxed{1,43 \text{ g/L}}$.

(e) Il s'agit de résoudre $g(t) = 1$. Ici, l'équation à résoudre est donc $\ln(3t+1) - t + 1 = 1$, qui se simplifie en $\ln(3t+1) - t = 0$. Ce n'est aucune des équations qu'on a apprises à résoudre en cours (et, d'ailleurs, il n'y a pas de méthode exacte pour résoudre ce type d'équation), le seul moyen est donc de demander une valeur approchée à la calculatrice :

$$solve(\ln(3t+1) - t + 1 = 1, t)$$

La calculatrice donne, à part $t = 0$, la solution $\boxed{t \approx 1,90}$ (c'est-à-dire 1h et 54 minutes).