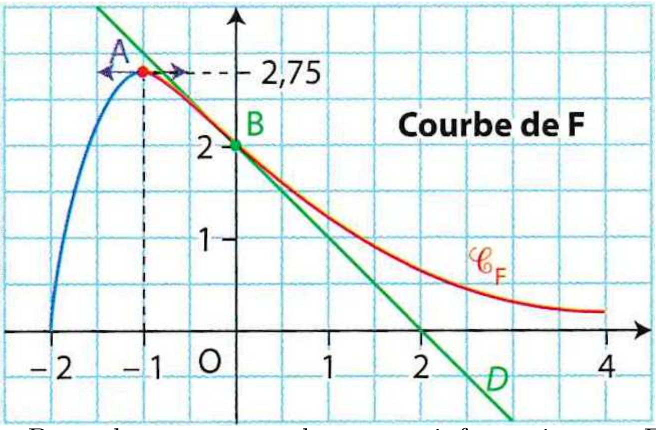
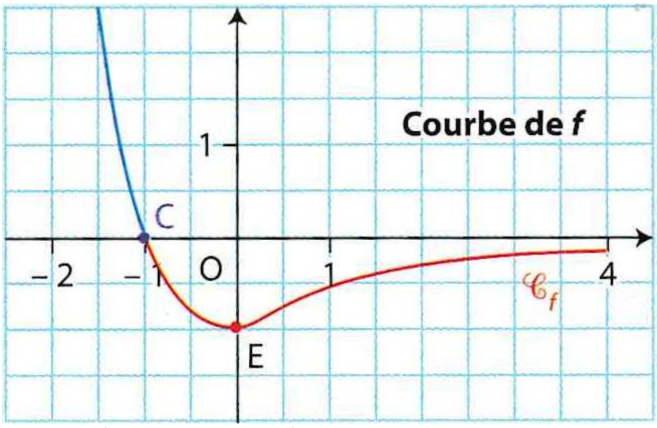
Exercice 2

Un élève a élaboré la fiche méthode ci-dessous où il tire des conséquences pour une fonction f à partir d'informations lues sur l'une de ses primitives F et inversement.





Dans chaque cas, on donne une information sur F et une information sur f. Recopier et compléter.

1. La tangente en A à $\mathcal{C}_F$ est horizontale donc $F'(-1) = 0$.
   $f(-1) = 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $\mathrm{C}(-1;0)$.
2. La tangente en B à $\mathcal{C}_F$ est la droite $\boxed{\mathcal{D}}$ donc $\boxed{F'(0) = -1}$ (la droite $\mathcal{D}$ est tangente au point d'abscisse 0, et sa pente est -1, ce qu'on peut voir en prenant deux points M et N et en appliquant la formule $\dfrac{y_\mathrm{M} - y_\mathrm{N}}{x_\mathrm{M} - x_\mathrm{N}}$).
   $\boxed{f(0) = -1}$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $\boxed{\text{le point E}(0;-1)}$.
3. F est croissante sur $[-2;-1]$ donc $F' \geq 0$ sur $[-2;-1]$.
   $f \geq 0$ sur $[-2;-1]$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ $\boxed{\text{est au-dessus de } (Ox) \text{ sur } [-2;-1]}$.
   F est décroissante sur $\boxed{[-1;4]}$ donc $\boxed{F' \leq 0 \text{ sur } [-1;4]}$.
   $\boxed{f \leq 0 \text{ sur } [-1;4]}$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est $\boxed{\text{est en-dessous de}}$ de (Ox) sur $\boxed{[-1;4]}$.

Exercice 1 — Prebac

Calculez la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x) = 6x^2 + 8x - 5$ satisfaisant $F(-1) = 5$.

Ici on commence par trouver toutes les primitives :

$$f(x) = 6 \times x^2 + 8 \times x - 5 \times 1.$$

$$F(x) = 6 \times \frac{x^3}{3} + 8 \times \frac{x^2}{2} - 5 \times x.$$

$$\boxed{F(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + k}.$$

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante k.

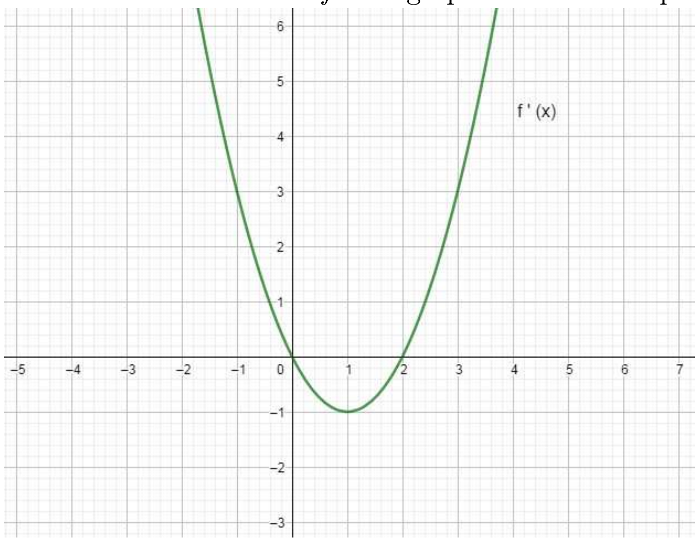
Maintenant, il faut que F vérifie la condition $F(-1) = 5$:

$$\begin{aligned}
F(-1) &= 5 && \text{On utilise l'expression de } F \\
2 \times (-1)^3 + 4 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) + k &= 5 && \text{On calcule} \\
-2 + 4 + 5 + k &= 5 && \text{On simplifie} \\
7 + k &= 5 && -7 \\
k &= -2
\end{aligned}$$

Ainsi la primitive cherchée est la fonction $\boxed{F(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 2}$.

Exercice 8 — Prebac

Donner les variations de f si le graphe ci-dessous représente sa dérivée f'.



On lit graphiquement le signe de f' pour en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Var $f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 9 — Prebac

Trouver la primitive F de la fonction f définie par $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$ telle que $F(-1) = 2$.

Ici on commence par trouver toutes les primitives :

$$f(x) = 3 \times x^3 + 2 \times x^2 + 5 \times x - 4 \times 1.$$

$$F(x) = 3 \times \frac{x^4}{4} + 2 \times \frac{x^3}{3} + 5 \times \frac{x^2}{2} - 4 \times x.$$

$$\boxed{F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x + k}.$$

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante k.

Maintenant, il faut que F vérifie la condition $F(-1) = 2$:

$$\begin{aligned}
F(-1) &= 2 && \text{On utilise l'expression de } F \\
\frac{3}{4} \times (-1)^4 + \frac{2}{3} \times (-1)^3 + \frac{5}{2} \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + k &= 2 && \text{On simplifie les puissances de } (-1) \\
\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + 4 + k &= 2 && -2 \\
\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + 2 + k &= 0 && \text{On réduit au même dénominateur} \\
\frac{3\times3}{4\times3} - \frac{2\times4}{3\times4} + \frac{5\times6}{2\times6} + \frac{2\times12}{1\times12} + k &= 0 && \text{On calcule les fractions} \\
\frac{9}{12} - \frac{8}{12} + \frac{30}{12} + \frac{24}{12} + k &= 0 && \text{On additionne les fractions} \\
\frac{55}{12} + k &= 0 && -\frac{55}{12} \\
k &= -\frac{55}{12}
\end{aligned}$$

Ainsi la primitive cherchée est la fonction $\boxed{F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x - \frac{55}{12}}$.