Révisions pour le Devoir Surveillé n°2 — Le mardi 30 novembre 2021

Exercice 1

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive puis toutes les primitives.

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = 5x^2 - 3x + 27$
3. $f(x) = -\dfrac{3x}{7} + 33.3x^3$

Exercice 2

Pour la fonction f suivante, déterminer la primitive F qui vérifie la condition donnée.

$$\begin{cases} f(x) = 6x^2 - 4x + 7 \\ F(1) = 26 \end{cases}$$

Exercice 3

On considère la fonction $h : x \mapsto x^3$.

1. Déterminer $\displaystyle\int_{-5}^{-1} h(x)\,\mathrm{dx}$. On pourra appliquer la formule "Intégrale définie sur $[a;b]$" du formulaire.
2. Interpréter le résultat de la question précédente en terme d'aire, en expliquant par exemple sur un schéma approximatif.

Corrections

Exercice 1

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive puis toutes les primitives.

1. Pour $f(x) = x^3$, on applique simplement la formule du formulaire : $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ est une primitive, toutes les primitives sont de la forme $\boxed{F(x) = \dfrac{x^4}{4} + k}$.
2. Ici il faut calculer la primitive de plusieurs fonctions de référence :

$$f(x) = 5 \times x^2 - 3 \times x + 27 \times 1.$$

$$F(x) = 5 \times \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 27 \times x.$$

$$\boxed{F(x) = \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 27x + k}.$$

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante k.

3. De même :

$$f(x) = -\frac{3}{7} \times x + 33.3 \times x^3.$$

$$F(x) = -\frac{3}{7} \times \frac{x^2}{2} + 33.3 \times \frac{x^4}{4}.$$

$$\boxed{F(t) = -\frac{3x^2}{14} + \frac{33.3x^4}{4} + k}.$$

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante k.

Exercice 2

Ici on commence par trouver toutes les primitives :

$$f(x) = 6 \times x^2 - 4 \times x + 7 \times 1.$$

$$F(x) = 6 \times \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + 7 \times x.$$

$$\boxed{F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 7x + k}.$$

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dans chaque terme garder la constante et prendre une primitive de la fonction de référence.

3 : Pour trouver toutes les primitives, on rajoute une constante k.

Maintenant, il faut que F vérifie la condition $F(1) = 26$. On va donc écrire l'équation à laquelle on aboutit :

$$\begin{aligned}
F(1) &= 26 && \\
2 \times 1^3 - 2 \times 1^2 + 7 \times 1 + k &= 26 && \text{On remplace par l'expression de } F \\
2 - 2 + 7 + k &= 26 && \text{On calcule} \\
7 + k &= 26 && \text{On simplifie} \\
k &= 19 && -7
\end{aligned}$$

Ainsi la primitive cherchée est la fonction $\boxed{F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 7x + 19}$.

Exercice 3

On considère la fonction $h : x \mapsto x^3$.

1. On peut calculer une primitive $H(x) = \dfrac{x^4}{4}$ puis calculer $\displaystyle\int_{-5}^{-1} h(x)\,\mathrm{d}x = H(-1) - H(-5) = \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-5)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{625}{4} = -\frac{624}{4} = \boxed{-156}$.
2. Cette fonction est négative quand $x < 0$ (règle des signes : si $x < 0$, alors $x^3 < 0$ car c'est une puissance impaire d'un nombre négatif). On peut se rappeler de l'allure de la courbe de cette fonction qu'on a vue l'an dernier quand on étudiait les limites, ou bien faire un schéma d'une fonction négative quelconque sur l'intervalle $[-5; -1]$. Donc le calcul d'intégrale nous donne l'opposé de l'aire comprise entre $\mathcal{C}_h$, (Ox), entre les abscisses $x = -1$ et $x = -5$. Il s'agit de $\boxed{\text{l'opposé de l'aire bleue ci-dessous}}$: