Chapitre 1.
Nombres

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2022–2023

Plan du chapitre

- Rappels
- La racine carrée
- Les puissances

I/ Rappels

On utilise les ensembles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, où :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$: les nombres entiers naturels
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$: les nombres entiers relatifs
- $\mathbb{D}$: les nombres décimaux
- $\mathbb{Q}$: les nombres rationnels (les fractions)
- $\mathbb{R}$: les nombres réels

Remarque : les nombres irrationnels sont les nombres qui sont dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$ (ex. : π, $\sqrt{2}$).

Notation : A $\subset$ B se lit « A est inclus dans B » (cela veut dire que tous les éléments de A sont dans B). Par exemple “les élèves de S3FRA $\subset$ les élèves de l’EEB1”.

I/ Rappels

Pour tous nombres a et b dans $\mathbb{N}$, $a + b \in \mathbb{N}$.

Mais… peut-on enlever 5 billes d'un sac qui en contient 2 ? Peut-on remplir l'opération $5 + \blacksquare = 2$ avec un entier positif ? Non : $2 - 5 \notin \mathbb{N}$: pour pouvoir soustraire, il faut $\mathbb{Z}$.

> Tout nombre e dans $\mathbb{Z}$ a un <u>opposé</u> : c'est le nombre f tel que $e + f = 0$. On le note $-e$.

Effectivement : $e + (-e) = e - e = 0$.

<u>Remarque :</u> 0 est l'<u>élément neutre</u> de +, c'est-à-dire que $a + 0 = a$ (0 « ne sert à rien » dans une addition).

<u>Notation :</u> $x \in A$ se lit « x appartient à A » (cela veut dire que l'élément x est dans l'ensemble A). Par exemple "monsieur Barsamian $\in$ les professeurs de l'EEB1".

I/ Rappels

Pour tous nombres a et b dans $\mathbb{Z}$, $a \times b \in \mathbb{Z}$.

Mais… peut-on diviser une dette de 2 € de manière égale parmi 3 personnes ? Peut-on remplir l'opération $3 \times \blacksquare = -2$ avec un entier relatif ? Non : $-2 \div 3 \notin \mathbb{Z}$: pour pouvoir diviser, il faut $\mathbb{Q}$.

Tout nombre r dans $\mathbb{Q}$ a un inverse : c'est le nombre s tel que $r \times s = 1$. On le note $\dfrac{1}{r}$.

Effectivement : $r \times \dfrac{1}{r} = \dfrac{\cancel{r}}{\cancel{r}} = 1$.

Remarque : 1 est l'élément neutre de $\times$, c'est-à-dire que $a \times 1 = a$ (1 « ne sert à rien » dans une multiplication).

I/ Rappels

- "$+$" est commutative ($a + b = b + a$) et associative ($(a + b) + c = a + (b + c)$)
- "$\times$" (aussi notée "$\cdot$") est également commutative et associative
- ⚠ Ne fonctionne pas avec "$-$" : $2 - (3 - 5) \neq (2 - 3) - 5$.
- "$+$" se distribue par rapport à "$\times$" :

$$
\begin{aligned}
& 3 \cdot (x - 1) & \\
= \quad & 3 \cdot x - 3 \cdot 1 & \text{On distribue.} \\
= \quad & 3x - 3 & \text{On simplifie.}
\end{aligned}
$$

Ordre des calculs

Ordre « PEMDAS » : parenthèses, exposants, multiplications, divisions, additions, soustractions.

La racine carrée est l'opération réciproque à l'opération d'élévation au carré.

Se demander « quel est le nombre, qui, au carré, donne 25 ? » c'est exactement se demander « quelle est la racine carrée de 25 ? ». On peut donc écrire $5 = \sqrt{25}$ (ce symbole est la racine carrée).

Ce qu'on a vu est résumé dans la petite vidéo suivante (3 minutes 30) :

https://www.lumni.fr/video/petits-contes-mathematiques-la-racine-carree

1) Notion de racine carrée :

Définition

Soit $a \geq 0$. Le nombre positif qui, élevé au carré, donne a s'appelle la racine carrée de a. Ce nombre est noté $\sqrt{a}$.

Exemples

- $5 = \sqrt{25}$
- $0,7 = \sqrt{0,49}$

Première propriété : l'élévation au carré et la racine carrée sont deux opérations réciproques (pour des nombres positifs), donc :

Racine carrée et carré

Si a est un nombre positif, alors $\left(\sqrt{\mathrm{a}}\right)^2 = \mathrm{a}$ et $\sqrt{\mathrm{a}^2} = \mathrm{a}$.

⚠ Cela est vrai seulement quand a est positif ! Par exemple, $(-3)^2 = 9$, mais $\sqrt{9} = 3$ (et pas -3).

⚠ Puisque le carré d'un nombre (réel) est toujours positif, un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée ! Par exemple, cela n'a pas de sens (à notre niveau) d'écrire $\sqrt{-1}$.

Certaines racines carrées ne peuvent pas être écrites de manière exacte sous forme décimale. Il faut alors utiliser la calculatrice !

Exemple : $\sqrt{2} \approx 1,414213562\ldots$

Remarque : (hors programme) : il n'existe donc pas de manière exacte d'écrire le nombre $\sqrt{2}$ avec un développement décimal. À partir de l'an prochain, quand on demandera une valeur exacte d'un calcul avec $\sqrt{2}$, il faut donc laisser $\sqrt{2}$, et ne pas demander à la calculatrice de donner une valeur approchée.