Exercice A1 **6 points**

1. **Calculer** l'expression suivante : 1.5 point

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$$

2. Soit x un angle en radians. **Exprimer** à l'aide de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$ l'expression suivante : 1.5 point

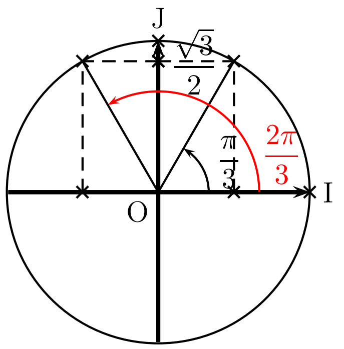
$$B = \sin(\pi - x) + \sin(2\pi + x) + \cos(-x) + \cos(x + \pi)$$

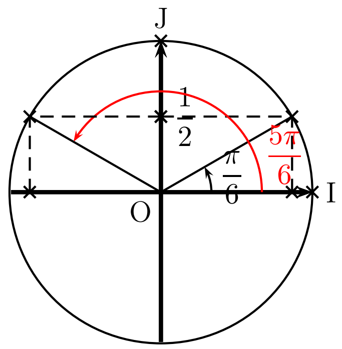
3. **Déterminer** $\cos(x)$ sachant que $\sin(x) = \frac{2}{3}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. 1 point
4. Dans chaque cas, **dire** si l'affirmation est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple et si elle est vraie, la **justifier** sur le cercle trigonométrique :
   (a) Si $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, alors $\cos(x) \geq 0$. 1 point
   (b) Si $a \geq b$, alors $\sin(a) \geq \sin(b)$. 1 point

On rappelle le tableau de valeurs (à savoir retrouver en dessinant le cercle trigonométrique ; les valeurs bleues se lisent directement sur le quart de cercle, les valeurs rouges se déduisent de la relation $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$. Pour la valeur en $45° = \frac{\pi}{4}$ radians, la valeur vient du fait que le triangle est isocèle en plus d'être rectangle.)

Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

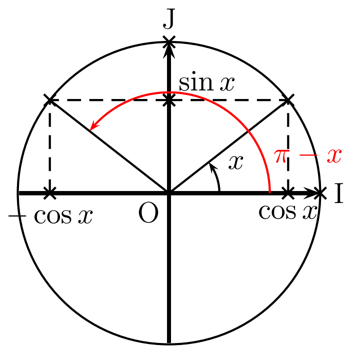
1. Dans le tableau on a : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Pour $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$, on peut dessiner le cercle trigonométrique et ainsi retrouver les formules sur les angles supplémentaires — somme égale à π :

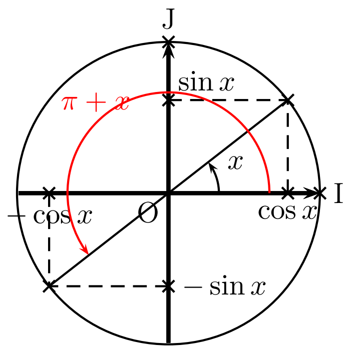


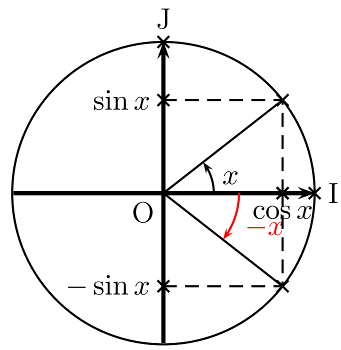


On peut maintenant calculer $A = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \boxed{2 + \sqrt{3}}$.

2. On redessine un cercle trigonométrique, comme à la question précédente mais pour x quelconque :







Donc $B = \sin(\pi - x) + \sin(2\pi + x) + \cos(-x) + \cos(x + \pi) = \sin x + \sin x + \cos x - \cos x = \boxed{2 \sin x}$.

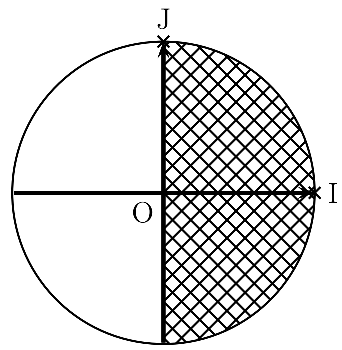
3. On utilise tout d'abord la formule $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$. Puisque $\sin(x)=\dfrac{2}{3}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)+\left(\frac{2}{3}\right)^2 &= 1 && \text{Calcul}\\
\cos^2(x)+\frac{4}{9} &= 1 && -\frac{4}{9}\\
\cos^2(x) &= \frac{5}{9} && \text{Résolution}\\
\cos^2(x) &= \pm\sqrt{\frac{5}{9}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}$$

Or, on sait que $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, et dans ce quart de cercle, les cosinus sont négatifs. Ainsi, $\boxed{\cos(x)=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$.

4. (a) $\boxed{\text{Vrai}}$. On a hachuré sur la droite les angles x qui vérifient $x\in\left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$, et sur ce demi-cercle, les cosinus sont bien positifs.

   (b) $\boxed{\text{Faux}}$. Par exemple $\pi\geq\dfrac{\pi}{2}$ mais $\sin(\pi)=0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ donc on n'a pas $\sin(\pi)\geq\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.



Exercice A2 **6 points**

1. **Calculer** les expressions suivantes : (a) $\sqrt[4]{16}$ (b) $(-64)^{\frac{1}{3}}$ — 2 points
2. **Calculer** C. On **donnera** le résultat sous forme décimale et en notation scientifique : — 2 points

$$C=\frac{4\times10^{-2}\times30\times10^{5}}{6\times10^{-1}}$$

3. Pour fabriquer un piano, il faut tendre les cordes sur un cadre.

   La fréquence fondamentale f d'une corde est donnée par la formule $f=\dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ où L est la longueur de la corde (en m), T est la tension (en N) et μ est la masse linéique (en kg.m^{-1}).

   (a) **Exprimer** la masse linéique μ en fonction de la longueur L, de la tension T et de la fréquence f. — 1 point

   (b) **Exprimer** la longueur L en fonction de la masse linéique μ, de la tension T et de la fréquence f. — 1 point

1. (a) $\sqrt[4]{16}=\boxed{2}$ car $2^4=16$;

   (b) $(-64)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-64}=\boxed{-4}$ car $(-4)^3=-64$.

2. $C=\dfrac{4\times10^{-2}\times30\times10^{5}}{6\times10^{-1}}=\dfrac{4\times30\times10^{4}}{6}=\dfrac{2\times2\times3\times10\times10^{4}}{2\times3}=\boxed{2\times10^{5}=200\ 000}$.

3. (a) On va isoler μ :

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} && \text{Carré}\\
f^2 &= \frac{1}{4L^2}\times\frac{T}{\mu} && \times\mu\\
\mu f^2 &= \frac{T}{4L^2} && \div(f^2)\\
\mu &= \boxed{\frac{T}{4L^2f^2}}
\end{aligned}$$

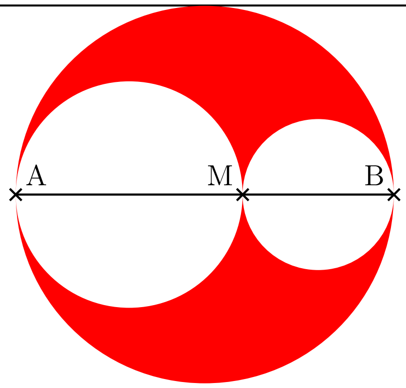
   (b) On va isoler L :

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} && \times L\\
Lf &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\mu}} && \div f\\
L &= \boxed{\frac{1}{2f}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}
\end{aligned}$$

Exercice A3 — 8 points

On considère un segment [AB] de longueur 5 et un point M sur ce segment. On note x la longueur AM.

On construit alors les 3 cercles de diamètres [AB], [AM] et [MB], comme sur le dessin ci-contre.



<u>Rappel :</u> *l'aire d'un disque de diamètre* D *est* $\pi\dfrac{D^2}{4}$.

1. **Résoudre** l'équation $2x^2 - 10x + 8 = 0$. — 2 points
2. (a) **Donner** l'aire du disque de diamètre [AB]. — 3 points
   (b) **Exprimer** l'aire du disque de diamètre [AM] en fonction de x.
   (c) **Exprimer** l'aire du disque de diamètre [MB] en fonction de x.
3. On veut savoir où placer le point M pour que l'aire colorée soit égale à $\dfrac{8}{25}$ de l'aire du disque de diamètre [AB]. — 2 points
   (a) **Montrer** que ce problème se ramène à l'équation résolue en 1).
   (b) **Déterminer** alors le(s) emplacement(s) de M qui convien(nen)t.
4. **Est-il possible** de placer M sur [AB] pour que l'aire colorée soit égale à la moitié de l'aire du disque de diamètre [AB] ? — 1 point

---

1. Pour simplifier les calculs, on peut commencer à diviser toute l'équation par 2, ce qui donne $x^2 - 5x + 4 = 0$. Bien sûr, même sans cette simplification, on pouvait mener les calculs :
   Dans l'équation $2x^2 - 10x + 8 = 0$, les coefficients sont $a = 2$, $b = -10$ et $c = 8$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 100 - 64 = 36$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{10 \pm \sqrt{36}}{2 \times 2} = \dfrac{10 \pm 6}{4}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \{1 ; 4\}}$.

2. (a) En utilisant la formule de l'énoncé il vient que l'aire du disque de diamètre [AB] est $\pi\dfrac{5^2}{4} = \boxed{\pi\dfrac{25}{4}}$.

   (b) Puisqu'on a appelé $x = \text{AM}$, alors l'aire du disque de diamètre [AM] s'exprime $\boxed{\pi\dfrac{x^2}{4}}$.

   (c) Pour faire apparaître x, on remarque simplement que $\text{MB} = \text{AB} - \text{AM} = 5 - x$. Du coup, l'aire du disque de diamètre [MB] s'exprime $\boxed{\pi\dfrac{(5-x)^2}{4}}$.

3. On veut savoir où placer le point M pour que l'aire colorée soit égale à $\dfrac{8}{25}$ de l'aire du disque de diamètre [AB].

   (a) L'aire colorée est égale à l'aire du grand disque moins les aires des deux petits disques. On veut que cette aire soit égale à $\dfrac{8}{25}$ du grand disque, donc :

$$
\begin{aligned}
\pi\frac{25}{4} - \pi\frac{x^2}{4} - \pi\frac{(5-x)^2}{4} &= \frac{8}{25} \times \pi\frac{25}{4} && \div\pi \\
\frac{25 - x^2 - (5-x)^2}{4} &= \frac{8 \times 25}{25 \times 4} && \text{Développement, simplification par 25} \\
\frac{25 - x^2 - (25 - 10x + x^2)}{4} &= \frac{8}{4} && \text{Calcul} \\
\frac{25 - x^2 - 25 + 10x - x^2}{4} &= \frac{8}{4} && \times 4 \\
-2x^2 + 10x &= 8 && +2x^2 - 10x \\
0 &= 2x^2 - 10x + 8
\end{aligned}
$$

   On a bien retrouvé l'équation du 1).

   (b) En 1), on avait trouvé comme solutions 1 et 4. Il faut donc placer M $\boxed{\text{à 1 cm ou à 4 cm du point A}}$.

4. Cette fois, on veut que l'aire colorée soit égale à $\frac{1}{2}$ du grand disque, donc :

$$
\begin{aligned}
\pi\frac{25}{4} - \pi\frac{x^2}{4} - \pi\frac{(5-x)^2}{4} &= \frac{1}{2}\times\pi\frac{25}{4} && \div\pi\\
\frac{25 - x^2 - (5-x)^2}{4} &= \frac{25}{2\times 4} && \text{Développement}\\
\frac{25 - x^2 - (25 - 10x + x^2)}{4} &= \frac{25}{2\times 4} && \text{Calcul}\\
\frac{25 - x^2 - 25 + 10x - x^2}{4} &= \frac{25}{8} && \times 8\\
2(-2x^2 + 10x) &= 25 && \text{Développement et } -25\\
-4x^2 + 20x - 25 &= 0
\end{aligned}
$$

Dans l'équation $-4x^2 + 20x - 25 = 0$, les coefficients sont $a = -4$, $b = 20$ et $c = -25$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4\times(-4)\times(-25) = 400 - 400 = 0$. Donc on a une solution $x = \frac{-20}{2\times(-4)} = \boxed{2,5}$. Donc oui, c'est possible, il faut que $\boxed{\text{M soit le milieu de [AB]}}$.

Exercice B1 — 4 points

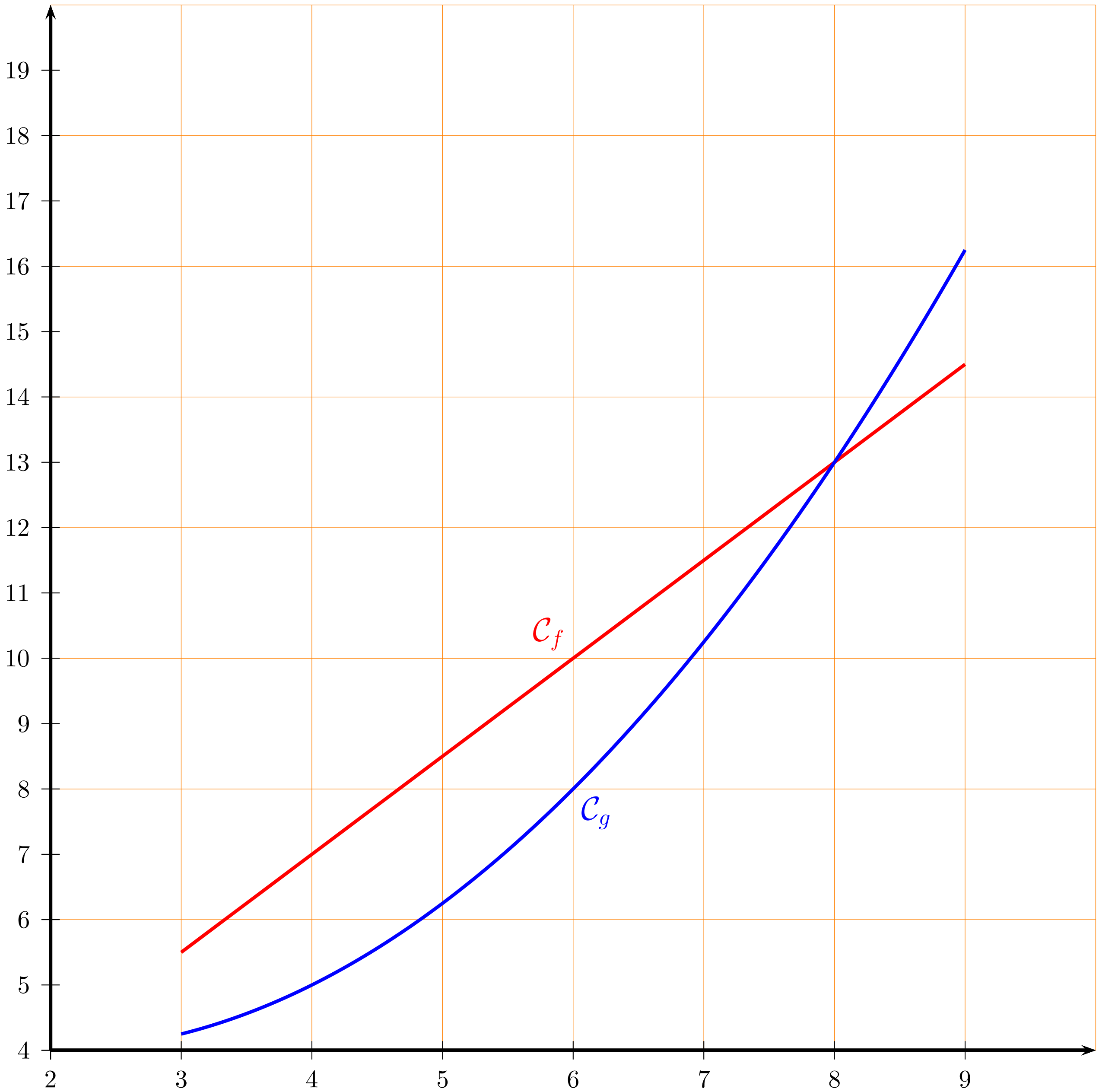
Une entreprise fabrique des vélos électriques. L'offre et la demande varient en fonction du prix de vente choisi. On note x ce prix en centaines d'euros. L'entreprise sait qu'elle doit se fixer un prix entre 300 € et 900 €. L'offre est représentée par la fonction f définie par $f(x) = 1,5x + 1$. La demande est représentée par la fonction g définie par $g(x) = 0,25x^2 - x + 5$.	
1. **Remplissez** le tableau de valeurs suivant :	1 point
2. À l'aide du tableau de la question 1), **tracer** les courbes des fonctions f et g pour des valeurs de x entre 3 et 9 dans l'encart de papier millimétré prévu à cet effet.	1.5 point
3. **Résoudre** l'équation $f(x) = g(x)$ de manière algébrique.	1 point
4. **Déterminer** le prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix qui permet d'avoir une offre égale à la demande.	0.5 point

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	5,5	7	8,5	10	11,5	13	14,5
$g(x)$	4,25	5	6,25	8	10,25	13	16,25

1. On a rempli le tableau de valeurs à partir de l'outil table de valeurs de la calculatrices :

2. Les valeurs de x sont entre 3 et 9, on peut choisir 2 cm $\Leftrightarrow$ 1 ; les valeurs de y sont entre $4,25$ et $16,25$, on peut choisir 1 cm $\Leftrightarrow$ 1.

   Le graphique qu'on obtient est alors à la page suivante. Ici les axes ne se coupent pas à l'origine par manque de place.



3. Pour résoudre algébriquement, il faut montrer le détail du calcul (et non pas demander directement à la calculatrice de trouver les points d'intersection, ce qui, certes, serait possible si on n'avait pas imposé la méthode).

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) && \text{On remplace par les expressions} \\ 1,5x+1 &= 0,25x^2 - x + 5 && -1,5x-1 \\ 0 &= 0,25x^2 - 2,5x + 4 && \times 4 \\ 0 &= x^2 - 10x + 16 \end{aligned}$$

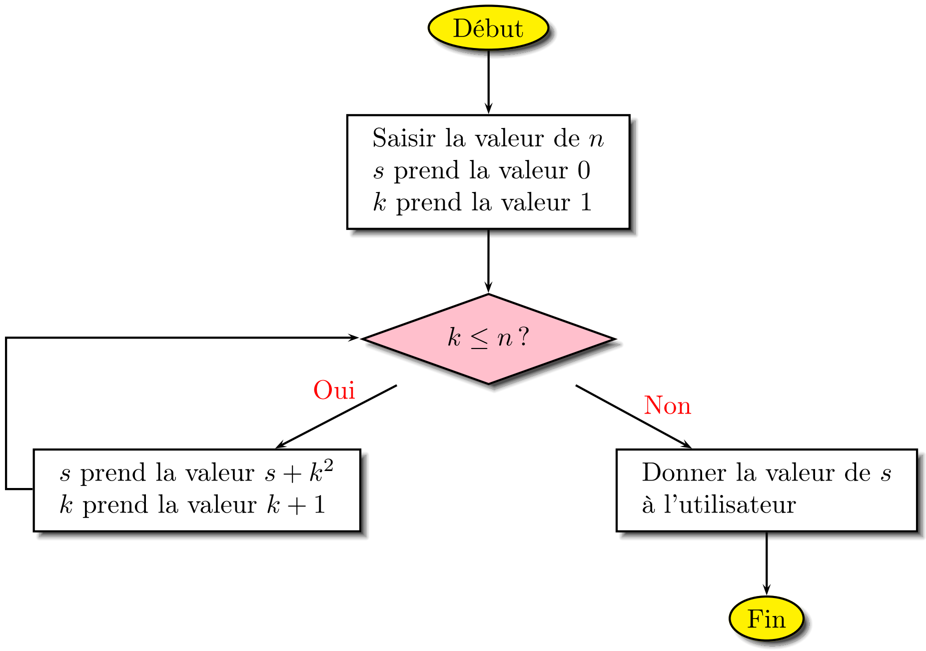
Dans l'équation $x^2 - 10x + 16 = 0$, les coefficients sont $a = 1$, $b = -10$ et $c = 16$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 100 - 64 = 36$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{10 \pm \sqrt{36}}{2 \times 1} = \dfrac{10 \pm 6}{2}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \{2; 8\}}$.

On pouvait vérifier le calcul en vérifiant graphiquement que les points d'intersection des deux courbes sont bien en $x = 2$ et $x = 8$. Si on n'avait pas pensé à multiplier par 4 (je l'ai fait pour éviter les calculs avec des virgules), on pouvait aussi directement résoudre $0,25x^2 - 2,5x + 4 = 0$ avec les coefficients donc $a = 0,25$, $b = -2,5$ et $c = 4$… mais le risque d'erreur avec des virgules est plus important !

4. L'offre est égal à la demande quand $f(x) = g(x)$. Les deux solutions 2 et 8 ne sont pas toutes les deux possibles, car x représente le prix en centaines d'euros, et le prix doit être entre 300 et 900€. Du coup la seule valeur possible est $x = 8$, c'est-à-dire $\boxed{800€}$.

Exercice B2 **3.5 points**

On considère l'organigramme ci-dessous :



1. **Quelle est** la valeur de s donnée à l'utilisateur à la fin de l'algorithme si l'utilisateur saisit $n = 3$? Si l'utilisateur saisit $n = 5$? — 2 points

   On pourra remplir un tableau de suivi de variables comme suit :

n	s	k
...	...	...

2. **Conjecturez** une expression de la valeur s donnée à l'utilisateur, en fonction de la valeur de n saisie en entrée. On pourra répondre avec une phrase, ou avec une expression utilisant « ... ». — 0.5 point
3. Si vous deviez transformer cet organigramme en programme, **utiliseriez-vous** une boucle « For » (une boucle « Pour ») ou une boucle « While » (une boucle « Tant que ») ? **Justifiez**. — 1 point

1. On va remplir un tableau de suivi de variables pour répondre à la question :

n	s	k
3	—	—
3	0	—
3	0	1
Test vrai car $1 \leq 3$		
3	$0 + 1^2 = 1$	1
3	1	$1 + 1 = 2$
Test vrai car $2 \leq 3$		
3	$1 + 2^2 = 5$	2
3	5	$2 + 1 = 3$
Test vrai car $3 \leq 3$		
3	$5 + 3^2 = 14$	3
3	14	$3 + 1 = 4$
Test faux car $4 > 3$, fin.		

Pour le nombre entré $n = 3$, l'algorithme renvoie $\boxed{s = 14}$. Si on entre $n = 5$, le calcul continue un peu plus, on reprend de la dernière valeur :

n	s	k
...	...	...
3	14	$3+1=4$
Test vrai car $4 \leq 5$		
3	$14+4^2=30$	4
3	30	$4+1=5$
Test vrai car $5 \leq 5$		
3	$30+5^2=55$	5
3	55	$5+1=6$

Pour le nombre entré $n=5$, l'algorithme renvoie $\boxed{s=55}$.

2. À chaque étape dans la boucle, la valeur de k augmente de 1, et on rajoute à s la valeur de k^2. Ainsi on part de $s=0$, on ajoute 1^2, puis 2^2, etc. jusqu'à n^2 (dernière valeur de k possible). Ainsi, $\boxed{s=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$, c'est-à-dire la somme de tous les carrés des entiers de 1 à n.
3. Vu la phrase que l'on vient d'écrire, on a tout simplement envie d'utiliser une boucle « Pour », en calculant $\boxed{\text{Pour } k \text{ de } 1 \text{ à } n,\ s \text{ prend la valeur } s+k^2}$, voir Listing 1.
Mais en fait la manière dont l'organigramme suggère aussi une boucle « Tant que », ce qui donne alors $\boxed{\text{Tant que } k \leq n,\ s \text{ prend la valeur } s+k^2 \text{ et } k \text{ prend la valeur } k+1}$, voir Listing 2.

```python
n = int(input("Saisir la valeur de n "))
s = 0
for k in range(1, n + 1):
    s = s + k*k
print("La valeur de s est", s)
```

Listing 1 – Boucle pour.

```python
n = int(input("Saisir la valeur de n "))
s = 0
k = 1
while (k <= n):
    s = s + k*k
    k = k + 1
print("La valeur de s est", s)
```

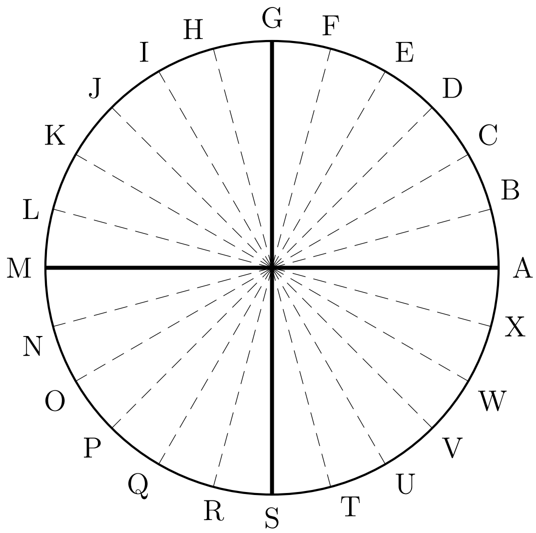
Listing 2 – Boucle tant que.

Remarque : De manière générale, toute boucle « Pour » peut toujours également s'écrire avec une boucle « Tant que » ... mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

Exercice B3 **2.5 points**

1. **Convertir** en radians 112°. — 1 point
2. **Indiquer** la lettre représentant les mesures d'angles suivantes sur le cercle trigonométrique ci-contre : — 1.5 point

(a) $\dfrac{15\pi}{4}$ rad	(b) $\dfrac{14\pi}{3}$ rad	(c) 315°



1. 112°, c'est $\dfrac{112}{180}\pi$ radians (car π radians correspondent à 180°), donc en simplifiant (ce que la calculatrice fait automatiquement) il vient $\boxed{\dfrac{28\pi}{45}}$.
2. (a) $\dfrac{15\pi}{4}=\dfrac{8\pi+7\pi}{4}=2\pi+\dfrac{7\pi}{4}$ correspond à 1 tour complet plus 7 huitièmes de tours : le point $\boxed{\text{V}}$.
(b) $\dfrac{14\pi}{3}=\dfrac{12\pi+2\pi}{3}=4\pi+\dfrac{2\pi}{3}$ correspond à 2 tours complets plus 2 sixièmes de tours : le point $\boxed{\text{I}}$.
(c) $315°=360°-45°$ correspond à 1 tour complet moins 1 huitième de tour, on arrive également en $\boxed{\text{V}}$.