Exercice 1 — Modèles et formules quadratiques — Sans calculatrice

1. (a) Dans l'équation $6x^2 + x - 1 = 0$, les coefficients sont $a = 6$, $b = 1$ et $c = -1$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 6} = \dfrac{-1 \pm 5}{12}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-6}{12}; \dfrac{4}{12}\right\}}$ (on pouvait simplifier en $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-1}{2}; \dfrac{1}{3}\right\}}$).

   (b) Dans l'équation $-2x^2 + 4x - 5 = 0$, les coefficients sont $a = -2$, $b = 4$ et $c = -5$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = 16 - 40 = -24$. Donc on n'a aucune solution réelle, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

   (c) Dans l'équation $(x-1)^2 - 1 = 0$, on peut soit développer pour faire apparaître les coefficients et résoudre comme au-dessus, soit reconnaître l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, soit encore laisser le carré avec le x d'un côté.

   - On développe : $(x-1)^2 - 1 = x^2 + 1^2 - 2 \times x \times 1 - 1 = x^2 + 1 - 2x - 1 = x^2 - 2x$. Du coup les coefficients sont $a = 1$, $b = -2$ et $c = 0$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4 + 0 = 4$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2 \times 1} = \dfrac{2 \pm 2}{2}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \{0; 2\}}$.
   - Avec l'identité remarquable : $(x-1)^2 - 1 = (x-1)^2 - 1^2 = (x-1+1)(x-1-1) = x(x-2)$. Du coup, $x(x-2) = 0$, c'est un produit de facteurs nul, qui est nul si et seulement l'un des facteurs est nul. On a soit $x = 0$, soit $x - 2 = 0$, d'où également $\boxed{\mathcal{S} = \{0; 2\}}$.
   - Enfin on pouvait aussi résoudre à la main :

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 - 1 &= 0 && \\
&&& +1 \\
(x-1)^2 &= 1 && \\
&&& a^2 = b \text{ avec } b > 0 \text{ équivaut à } a = \pm\sqrt{b} \\
x - 1 &= \pm\sqrt{1} && \\
&&& +1 \\
x &= \pm 1 + 1 &&
\end{aligned}$$

   On retrouve également $\boxed{\mathcal{S} = \{0; 2\}}$.

2. (a) La parabole $\mathcal{C}_f$ est tournée vers le haut, donc $\boxed{\text{pour } f,\ a > 0}$. La parabole $\mathcal{C}_g$ est tournée vers le bas, donc $\boxed{\text{pour } g,\ a < 0}$.

   La parabole $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses, donc $f(x) = 0$ n'a aucune solution réelle, ainsi $\boxed{\text{pour } f,\ \Delta < 0}$. La parabole $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en deux points, donc $g(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes, ainsi $\boxed{\text{pour } g,\ \Delta > 0}$.

   (b) On lit sur le graphique que $\mathrm{A}(2; 1)$ est le sommet de $\mathcal{C}_f$. Cela nous enjoint à utiliser la forme canonique :

$$f(x) = a(x-2)^2 + 1$$

   Pour trouver la valeur de a, on utilise le point $\mathrm{B}(1; 3)$. Effectivement on sait alors que :

$$\begin{aligned}
f(1) &= 3 && \\
&&& \text{On remplace } x \text{ par 1 dans l'expression de } f(x) \\
a(1-2)^2 + 1 &= 3 && \\
&&& \text{On simplifie} \\
a(-1)^2 + 1 &= 3 && \\
&&& \text{On calcule} \\
a + 1 &= 3 && \\
&&& -1 \\
a &= 2 &&
\end{aligned}$$

   Ainsi on trouve $\boxed{f(x) = 2(x-2)^2 + 1}$.

On lit sur le graphique que C$(-4;0)$ et D$(-1;0)$ sont les points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses, donc cela nous enjoint à utiliser la forme factorisée :

$$g(x) = a(x-(-4))(x-(-1)) = a(x+4)(x+1)$$

Pour trouver la valeur de a, on utilise le point E$(-2;1)$. Effectivement on sait alors que :

$$\begin{aligned} g(-2) &= 1 && \text{On remplace } x \text{ par } -2 \text{ dans l'expression de } g(x) \\ a(-2+4)(-2+1) &= 1 && \text{On simplifie} \\ a(2)(-1) &= 1 && \text{On calcule} \\ -2a &= 1 && \div(-2) \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi on trouve $\boxed{g(x) = -\frac{1}{2}(x+4)(x+1)}$.

Exercice 2 — Modèles et formules quadratiques — Avec calculatrice

1. (a) Afin de résoudre l'équation $h^2 - 40h + 400 = 18h$, on va faire apparaître la forme que l'on connaît bien $ah^2 + bh + c = 0$.

$$\begin{aligned} h^2 - 40h + 400 &= 18h && -18h \\ h^2 - 58h + 400 &= 0 \end{aligned}$$

Dans cette équation, $a = 1$, $b = -58$ et $c = 400$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-58)^2 - 4 \times 1 \times 400 = 1\ 764$.

Donc on a deux solutions $x_{\pm} = \dfrac{-(-58) \pm \sqrt{1\ 764}}{2 \times 1} = \dfrac{58 \pm 42}{2} = 29 \pm 21$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \{8;50\}}$.

(b) L'énoncé nous indique que $L = h - 20$, du coup ce n'est pas possible que h vaille 8 (cela donnerait $L = -12$). Du coup, $\boxed{\text{c'est forcément } h = 50}$.

2. Sur la figure de droite, on voit que P et R sont sur l'axe des abscisses, et que l'origine est le milieu de [PR]. Sur la figure de gauche, on voit que $L = 30$ donc PR $= 30$, ainsi $\boxed{\text{P}(-15;0) \text{ et R}(15;0)}$. Enfin, la figure de gauche indique que $h = 50$, donc le point Q, sur l'axe des ordonnées, a pour coordonnées $\boxed{\text{Q}(0;-50)}$.

3. La parabole a pour sommet Q, donc la forme canonique de f s'écrit :

$$f(x) = a(x-0)^2 - 50 = \boxed{ax^2 - 50}$$

4. Pour trouver la valeur de a, on utilise le point R$(15;0)$. Effectivement on sait alors que :

$$\begin{aligned} f(15) &= 0 && \text{On remplace } x \text{ par 15 dans l'expression de } f(x) \\ a(15)^2 - 50 &= 0 && \text{On simplifie} \\ 225a - 50 &= 0 && +50 \\ 225a &= 50 && \div 225 \\ a &= \frac{50}{225} \end{aligned}$$

Ainsi on trouve $\boxed{a = \frac{50}{225} = \frac{2}{9}}$.

5. En remplaçant a par sa valeur, on trouve donc $\boxed{f(x) = \frac{2}{9}x^2 - 50}$.

Exercice 4

1. Le graphique montre clairement les deux racines 2 et 14, ainsi que le sommet $(8;9)$. On peut donc utiliser soit la forme factorisée soit la forme canonique.

   - En utilisant le sommet $(8;9)$, cela nous donne la forme canonique :

     $$y = a(x-8)^2 + 9$$

     Pour trouver la valeur de a, on utilise (par exemple) le point B$(2;0)$. Effectivement, en remplaçant x par 2 et y par 0 il vient alors que :

     $$\begin{aligned} a(2-8)^2+9 &= 0 && \text{On simplifie} \\ a(-6)^2+9 &= 0 && \text{On calcule} \\ 36a+9 &= 0 && -9 \\ 36a &= -9 && \div 36 \\ a &= -0,25 \end{aligned}$$

     Ainsi on trouve $\boxed{y = -0,25(x-8)^2+9}$.

   - En utilisant les racines 2 et 14, cela nous donne la forme factorisée :

     $$y = a(x-2)(x-14)$$

     Pour trouver la valeur de a, on utilise (par exemple) le point $(4;5)$. Effectivement, en remplaçant x par 4 et y par 5 il vient alors que :

     $$\begin{aligned} a(4-2)(4-14) &= 5 && \text{On simplifie} \\ a(2)(-10) &= 5 && \text{On calcule} \\ -20a &= 5 && \div(-20) \\ a &= -0,25 \end{aligned}$$

     Ainsi on trouve $\boxed{y = -0,25(x-2)(x-14)}$ (ce qui est la même chose, bien sûr, on peut développer les deux expressions pour vérifier).

2. On donne ici pour les deux paraboles la forme développée ax^2+bx+c. On sait que le sommet est alors à l'abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Puisque les fusées sont tirées depuis $y=0$ donc depuis la plus petite racine, déterminer la portée revient à trouver l'autre racine et à faire la différence.

   - Pour $F_1 : y = \dfrac{-x^2}{4} + 4x - 7$, on trouve $\alpha = -\dfrac{4}{2\times\dfrac{-1}{4}} = 8$, et on trouve la hauteur maximale en remplaçant x par α, soit $\beta = \dfrac{-8^2}{4} + 4\times 8 - 7 = \boxed{9}$.

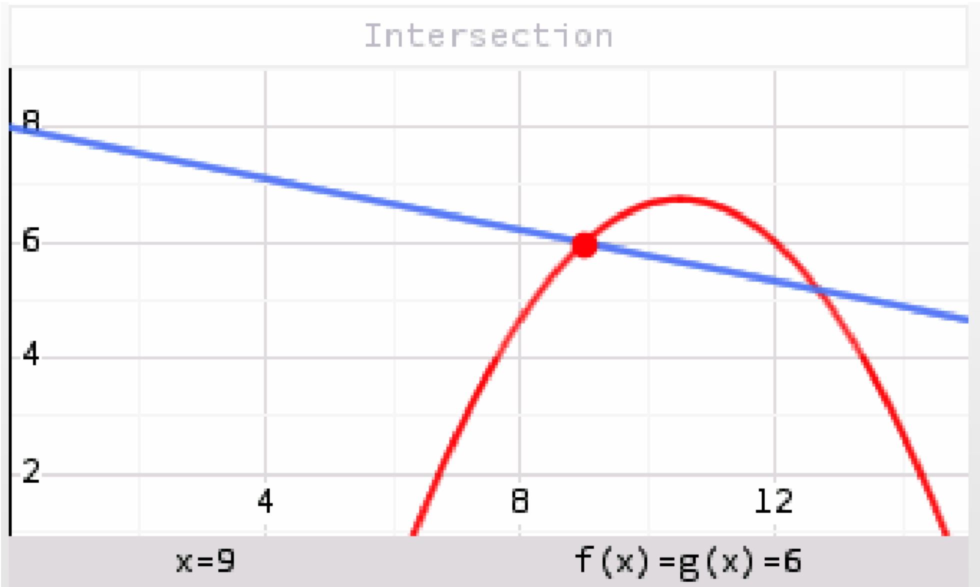
     Pour trouver les racines on résout l'équation $\dfrac{-x^2}{4} + 4x - 7 = 0$, les coefficients sont $a = \dfrac{-1}{4}$, $b = 4$ et $c = -7$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times\left(\dfrac{-1}{4}\right)\times(-7) = 16 - 7 = 9$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{-4\pm\sqrt{9}}{2\times\dfrac{-1}{4}} = \dfrac{-4\pm 3}{\dfrac{-1}{2}}$, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \{2;14\}$ donc la portée est de $14-2 = \boxed{12}$.

   - Pour $F_2 : y = \dfrac{-x^2}{3} + 7x - 30$, on trouve $\alpha = -\dfrac{7}{2\times\dfrac{-1}{3}} = 10,5$, et on trouve la hauteur maximale en remplaçant x par α, soit $\beta = \dfrac{-10,5^2}{3} + 7\times 10,5 - 30 = \boxed{6,75}$.

     Pour trouver les racines on résout l'équation $\dfrac{-x^2}{3} + 7x - 30 = 0$, les coefficients sont $a = \dfrac{-1}{3}$, $b = 7$ et $c = -30$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4\times\left(\dfrac{-1}{3}\right)\times(-30) = 49 - 40 = 9$. Donc on a deux solutions

$x_{\pm} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{9}}{2 \times \dfrac{-1}{3}} = \dfrac{-7 \pm 3}{\dfrac{-2}{3}}$, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \{6; 15\}$ donc la portée est de $15 - 6 = \boxed{9}$.

3. On doit résoudre $\dfrac{-x^2}{4} + 4x - 7 = \dfrac{-x^2}{3} + 7x - 30$, c'est-à-dire en ramenant tout à gauche $\dfrac{x^2}{12} - 3x + 23 = 0$, les coefficients sont $a = \dfrac{-1}{12}$, $b = -3$ et $c = 23$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times \left(\dfrac{-1}{12}\right) \times 23 = 9 + \dfrac{23}{3} = \dfrac{50}{3}$.
   Donc on a deux solutions $x_{\pm} = \dfrac{3 \pm \sqrt{\frac{50}{3}}}{2 \times \dfrac{-1}{12}} = \dfrac{3 \pm \sqrt{\frac{50}{3}}}{\dfrac{-1}{6}}$, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \left\{-18 - 6\sqrt{\frac{50}{3}}; -18 + 6\sqrt{\frac{50}{3}}\right\}$
   donc la solution est la valeur positive $x_D = \boxed{-18 + 6\sqrt{\frac{50}{3}}}(\approx 6,49)$.
4. On cherche l'équation d'une droite qui passe par les points $E(0; 8)$ et $(36; 0)$. On a clairement l'ordonnée à l'origine 8 et la pente $-\dfrac{8}{36} = -\dfrac{2}{9}$ donc l'équation de la droite est $\boxed{y = -\dfrac{2}{9}x + 8}$.
   On a tracé la trajectoire de l'oiseau et de la fusée F_2 à la calculatrice :



   Graphiquement, ou bien avec l'outil « intersection » (dans Calculs) de la calculatrice, on voit que la première intersection est en $\boxed{(9; 6)}$.
5. Question absolument et résolument hors programme, rassurez-vous ! Vous ferez ça, comme je l'ai dit en cours, en physique 4, en S6 (et aussi probablement en mathématiques en S7).
   $y = 10 - \dfrac{x^2}{80}$
6. Le spectateur occupe le plan de $(26; 0)$ à $(26; 1,8)$. On va calculer y de la fusée F_3 lorsque $x = 26$, on trouve $y = 10 - \dfrac{26^2}{80} = 1,55$ donc $\boxed{\text{oui}}$, la fusée va toucher le spectateur s'il ne bouge pas, mais $\boxed{\text{non}}$, en réalité, le spectateur va prendre peur suffisamment à l'avance pour bouger (enfin, j'espère !).
7. Ici on ne va pas mesurer l'écart entre les deux racines puisque la fusée n'est pas tirée depuis le sol, mais on va simplement calculer la plus grande des deux racines. On peut tracer le graphique pour s'en convaincre.
   La calculatrice, quand on résout $10 - \dfrac{x^2}{80} = 0$, donne comme plus grande racine $\boxed{20\sqrt{2} \approx 28,3}$.