

Chapitre 3. Angles et trigonométrie

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2022–2023



- Le cercle trigonométrique
- Formules trigonométriques

Activité 1 p.198

- Quand on tourne sur un cercle, il y a plusieurs longueurs différentes qui arrivent au même point.
- Si le rayon du cercle est 1, alors il s'agit du cercle trigonométrique...

I/ Le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1. Son périmètre est 2π (formule : périmètre = $2\pi R$).

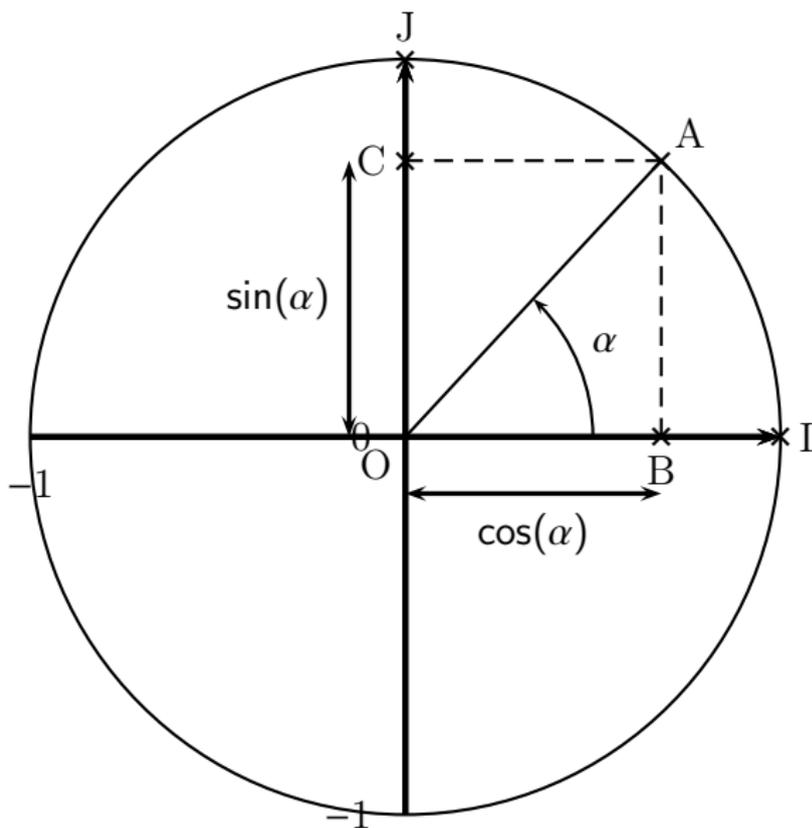
Pour se repérer sur le cercle, on définit un départ en $I(1;0)$ et on tourne dans le sens trigonométrique (le sens opposé des aiguilles d'une montre). On compte alors la longueur de l'arc de cercle parcouru. Remarque : on peut donc ajouter ou retrancher autant de fois que voulu la valeur 2π , ça ne change rien au repérage !

Si on nomme M le point sur lequel on s'arrête, on définit la mesure de l'angle \widehat{IOM} en radians comme étant la longueur de l'arc de cercle \widehat{IM} . On a donc le tableau de proportionnalité¹ :

Degrés	0	360	30	45	60	90	180
Radians	0	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

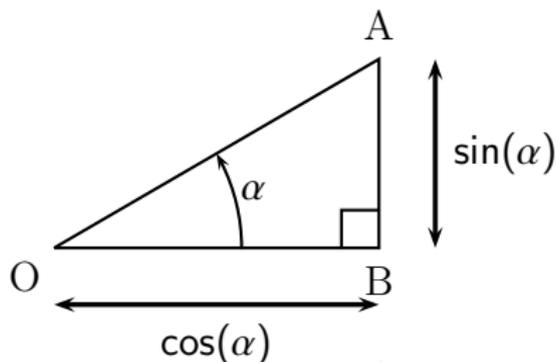
1. Degrés/radians : <https://www.youtube.com/watch?v=-fu9bSBKM00>

Le premier quart de cercle



- Soit C le cercle trigonométrique.
- Soit $A \in C$ tel que $\widehat{IA} = \alpha$
- Soit $B \in (OI)$ tel que $(AB) \parallel (OJ)$
- Dans OAB rectangle en B , on a $OA = 1$, donc $\cos(\alpha) = OB$
- Soit $C \in (OJ)$ tel que $(AC) \parallel (OI)$
- Dans OAC rectangle en C , on a $OA = 1$, donc $\sin(\alpha) = OC$

Première formule à retenir



Dans OAB rectangle en B, avec $OA = 1$ et $\alpha = \widehat{BOA}$:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Effectivement, cela provient tout simplement du théorème de Pythagore et de la définition des relations trigonométriques :

$$\cos(\alpha) = \frac{OB}{OA} = OB; \sin(\alpha) = \frac{AB}{OA} = AB; OB^2 + AB^2 = OA^2.$$

Valeurs remarquables

Les valeurs bleues se lisent directement sur le quart de cercle, les valeurs rouges se déduisent² de la relation $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$. Pour la valeur en $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radians, la valeur vient du fait que le triangle est isocèle en plus d'être rectangle³.

Degrés	0	30	45	60	90
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

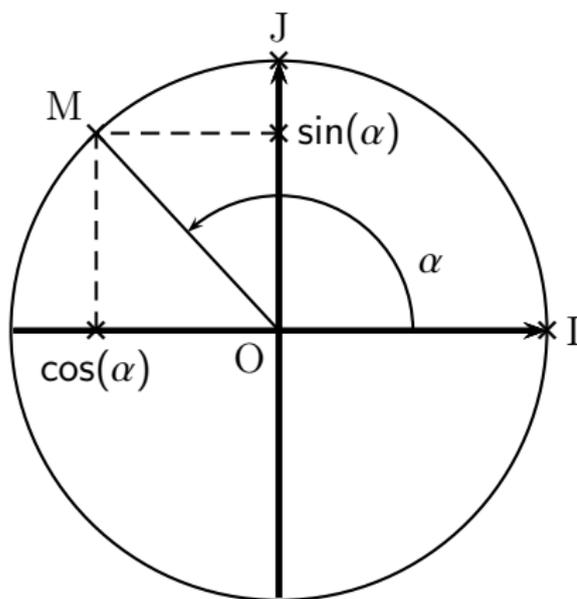
2. Pour $\frac{\pi}{3}$: <https://www.youtube.com/watch?v=4R1i5Vj72Ls>

3. Pour $\frac{\pi}{4}$: <https://www.youtube.com/watch?v=b2-EQupZUp8>

Extension au cercle entier

Par extension, on définit les fonctions sinus et cosinus sur \mathbb{R} par : $(\cos(x), \sin(x))$ sont les coordonnées du point M du cercle trigonométrique associé au nombre x .

Remarque : ce ne sont donc plus forcément des nombres positifs !
Sur un dessin⁴ :



4. Des exemples : <https://www.youtube.com/watch?v=ECNX9hnhG9U>

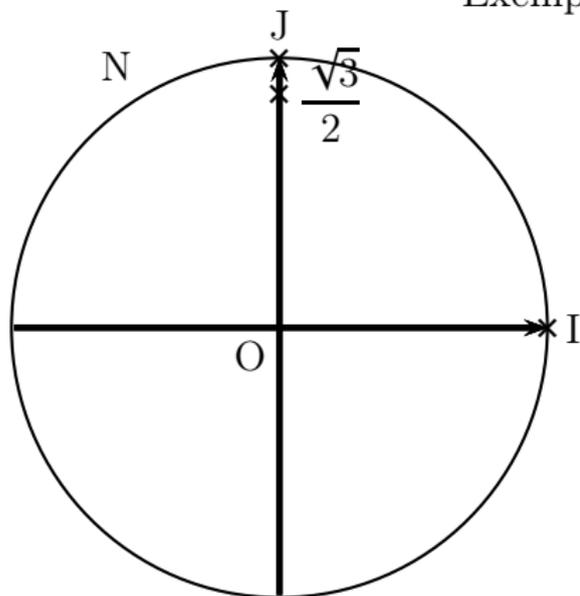
Angles associés⁵ : p.203.

5. <https://www.youtube.com/watch?v=m6tuif8ZpFY>

Résolution d'équations

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre⁶ des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

Exemple : résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

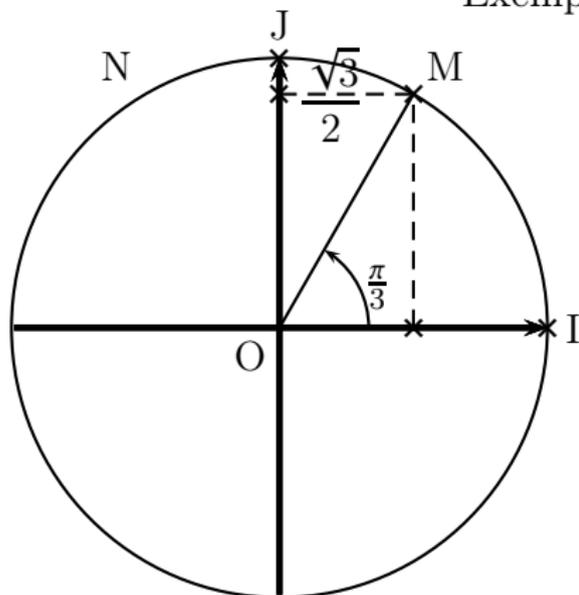


6. <https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGieLw>

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre⁶ des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

Exemple : résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- On reconnaît que $\frac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).

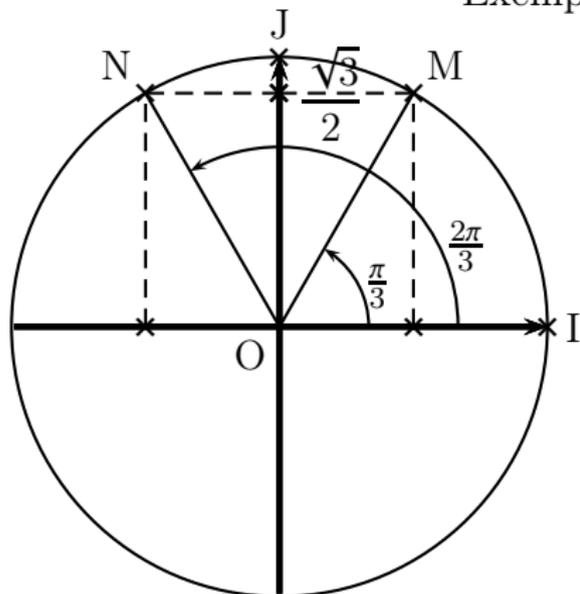


6. <https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIElw>

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre⁶ des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

Exemple : résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- On reconnaît que $\frac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).
- Par angles associés, on sait également que $\frac{2\pi}{3}$ est solution.

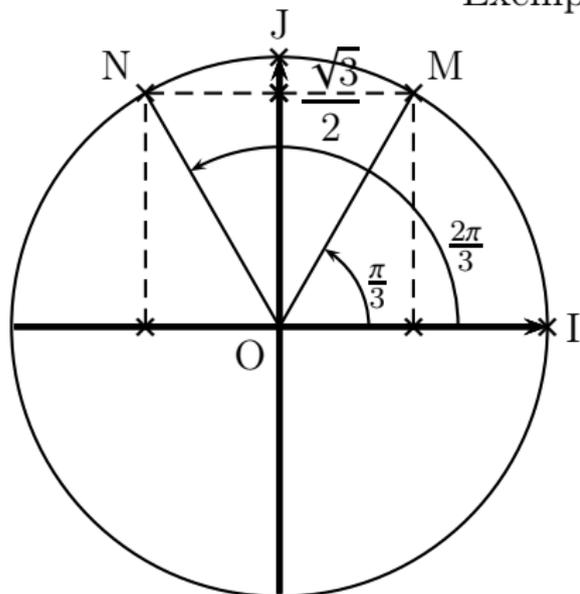


6. <https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIElw>

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre⁶ des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

Exemple : résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

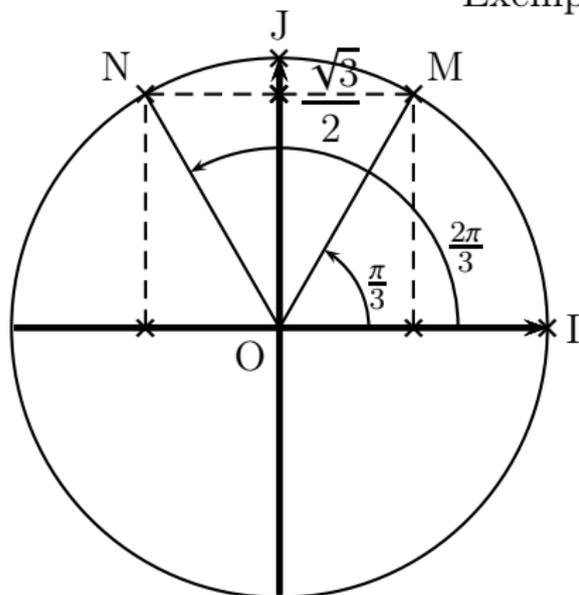
- On reconnaît que $\frac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).
- Par angles associés, on sait également que $\frac{2\pi}{3}$ est solution.
- Dans $[0; 2\pi[$, c'est terminé.



6. <https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIElw>

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre⁶ des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

Exemple : résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



- On reconnaît que $\frac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).
- Par angles associés, on sait également que $\frac{2\pi}{3}$ est solution.

- Dans $[0; 2\pi[$, c'est terminé.
- Dans un autre intervalle, on utilise des tours complets.

Exemple : dans $[-2\pi; 0[$, les solutions sont $\frac{-4\pi}{3}$ et $\frac{-5\pi}{3}$

6. <https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIElw>

Résoudre des équations trigonométriques avec la calculatrice :

- Pour résoudre $\cos(x) = a$, on demande $\arccos(a)$.
Effectivement, pour tout nombre $a \in [-1; 1]$,
 $\cos(\arccos(a)) = a$, donc $\arccos(a)$ est solution de l'équation.



\arccos ne donne que la solution dans $[0; \pi]$. Utiliser les angles associés ensuite !

- Pour résoudre $\sin(x) = a$, on demande $\arcsin(a)$.
Effectivement, pour tout nombre $a \in [-1; 1]$,
 $\sin(\arcsin(a)) = a$, donc $\arcsin(a)$ est solution de l'équation.

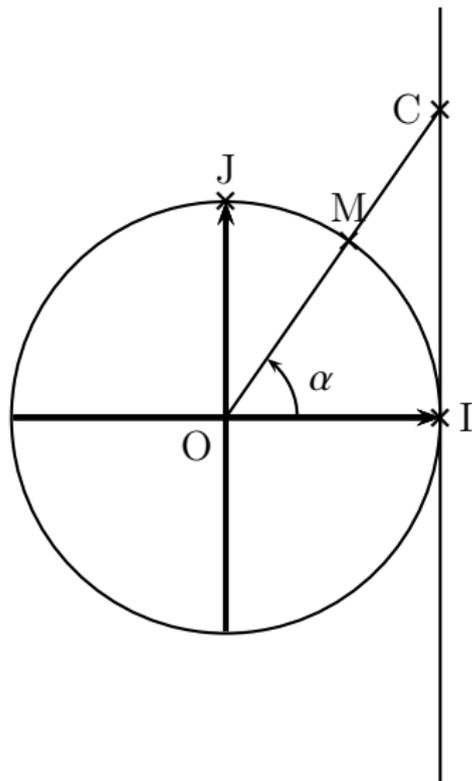


\arcsin ne donne que la solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

La tangente

On rappelle que dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle, c'est $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

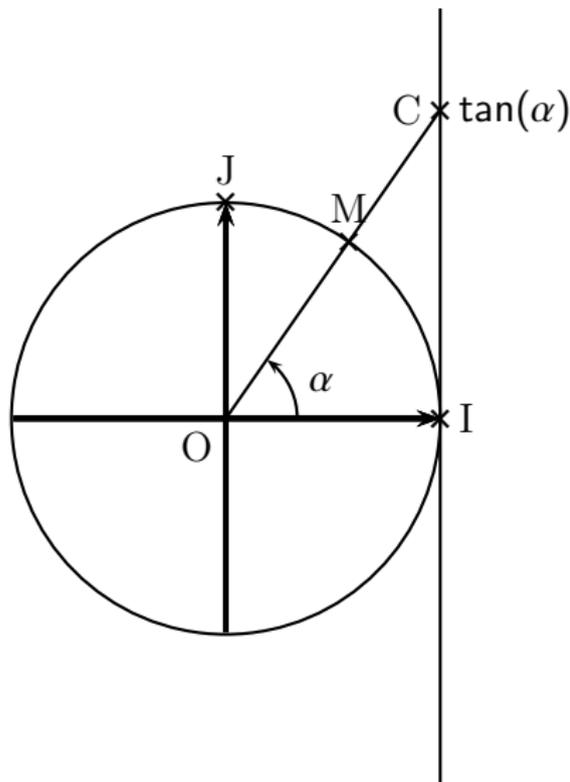
- Dans OIC rectangle en I,
 $\tan(\alpha) = \frac{IC}{OI}$, mais... $OI = 1$!



La tangente

On rappelle que dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle, c'est $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

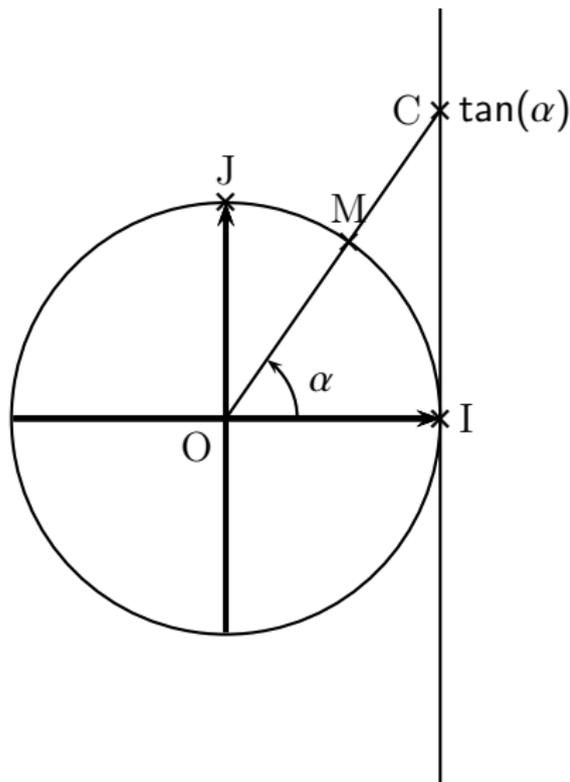
- Dans OIC rectangle en I ,
 $\tan(\alpha) = \frac{IC}{OI}$, mais... $OI = 1$!
- Donc, $IC = \tan(\alpha)$.



La tangente

On rappelle que dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle, c'est $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

- Dans OIC rectangle en I ,
 $\tan(\alpha) = \frac{IC}{OI}$, mais... $OI = 1$!
- Donc, $IC = \tan(\alpha)$.
-  En $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, pas de valeur.



La tangente

On rappelle que dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle, c'est $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

- Dans OIC rectangle en I ,
 $\tan(\alpha) = \frac{IC}{OI}$, mais... $OI = 1$!
- Donc, $IC = \tan(\alpha)$.

-  En $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, pas de valeur.
-  Entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, il faut toujours lire la tangente sur cette droite, donc... de l'autre côté!

