Chapitre 5.
(Dé)croissance exponentielle

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

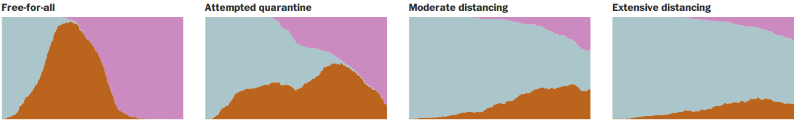
Année scolaire 2022–2023

Plan du chapitre

- Exemples de croissance et décroissance exponentielle
- Études « avec outil technologique » à l'aide de la calculatrice, ou de python
- Études « à la main » à l'aide des logarithmes

https://www.lemonde.fr/les-decodeurs/article/2020/06/26/qu-est-ce-que-le-r0-le-taux-de-reproduction-du-virus_6044327_4355770.html

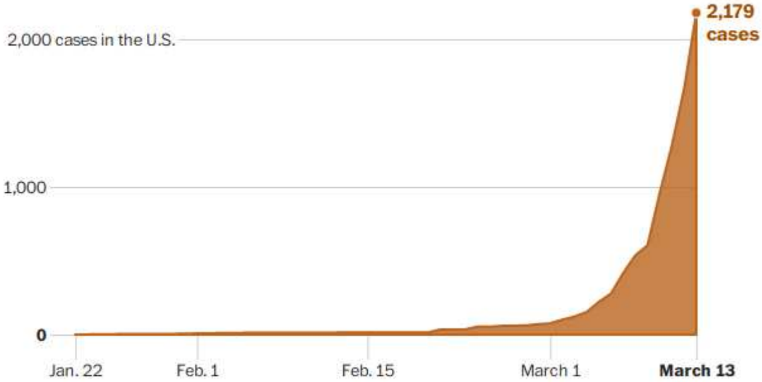
https://www.washingtonpost.com/graphics/2020/world/corona-simulator/



Introduction : COVID-19, une croissance exponentielle

https://www.lemonde.fr/les-decodeurs/article/2020/06/26/qu-est-ce-que-le-r0-le-taux-de-reproduction-du-virus_6044327_4355770.html

https://www.washingtonpost.com/graphics/2020/world/corona-simulator/



On ouvre un compte épargne le 1er janvier 2023 avec 1 000€, qui donne lieu à 2% d'intérêts composés chaque année.

Quand atteindra-t-on 1 500€ ?

Indication : on peut essayer de calculer d'année en année jusqu'à ce que cela fonctionne. . . en attendant de faire mieux dans les parties II/ et III/ de ce chapitre.

Soit $b > 0, b \neq 1$. Alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto b^x$ est la fonction exponentielle de base b.

Croissance exponentielle

Si $b > 1$, on parle de croissance exponentielle.

Exemple : placement d'argent à un taux $t > 0$.

Décroissance exponentielle

Si $0 < b < 1$, on parle de décroissance exponentielle.

Exemple : datation au carbone 14.

Remarque : si $b = 1$, la fonction $x \mapsto 1^x$ est... la fonction constante égale à 1 !

Remarque : si $b < 0$, on ne peut pas définir sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto b^x$.

Propriétés

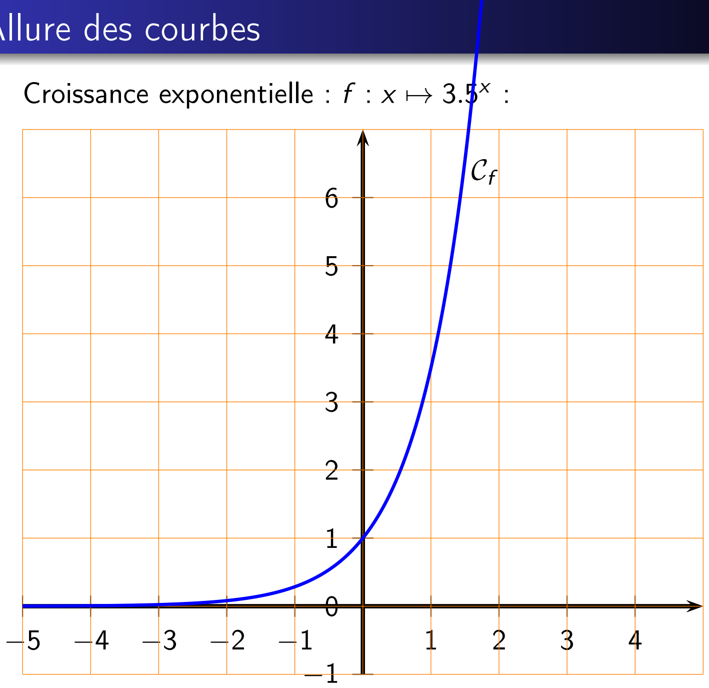
Les propriétés sur les exposants qui ont été vues lors du chapitre 1 sont toujours valables :

- $b^x \times b^y = b^{x+y}$
- $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$
- $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
- $(b^x)^y = b^{x \times y}$

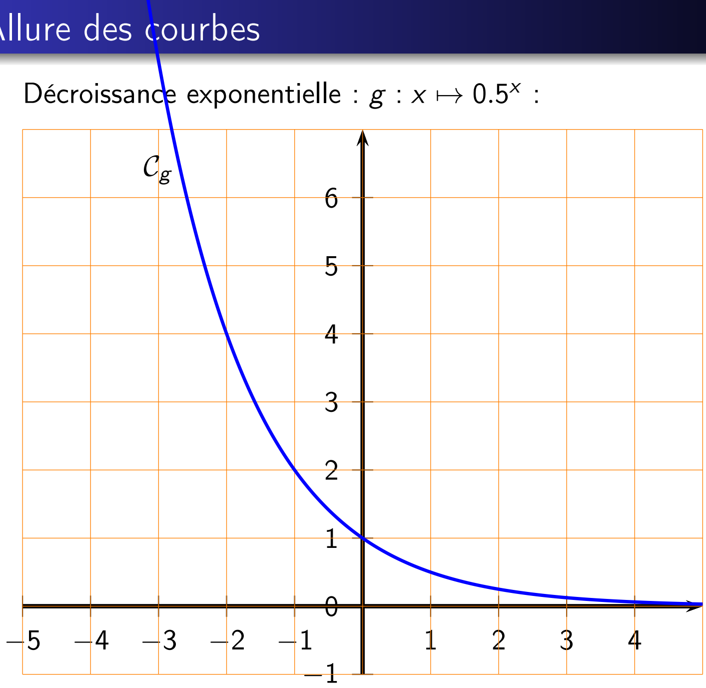
Remarque : on utilisera parfois dans ce chapitre “à tort” la fonction exponentielle de base b pour des phénomènes discrets ; vous verrez l'an prochain qu'en fait il s'agit plutôt de l'étude de suites géométriques.

Remarque : pour tout $b \in \mathbb{R}$, $b^0 = 1$, donc la courbe d'une fonction exponentielle passe toujours par le point $(0, 1)$.

Croissance exponentielle : $f : x \mapsto 3.5^x$:



Décroissance exponentielle : $g : x \mapsto 0.5^x$:



Étude numérique des fonctions exponentielles

- avec le tableau de valeurs
- avec la courbe de la fonction
- avec le solveur d'équations
- avec python

Pour résoudre $b^x = c$, on utilise les logarithmes.

Fonctions logarithmes

Soit $b > 0$, $b \neq 1$. La fonction logarithme de base b, notée $\log_b$, est la réciproque de la fonction exponentielle de base b. Donc :

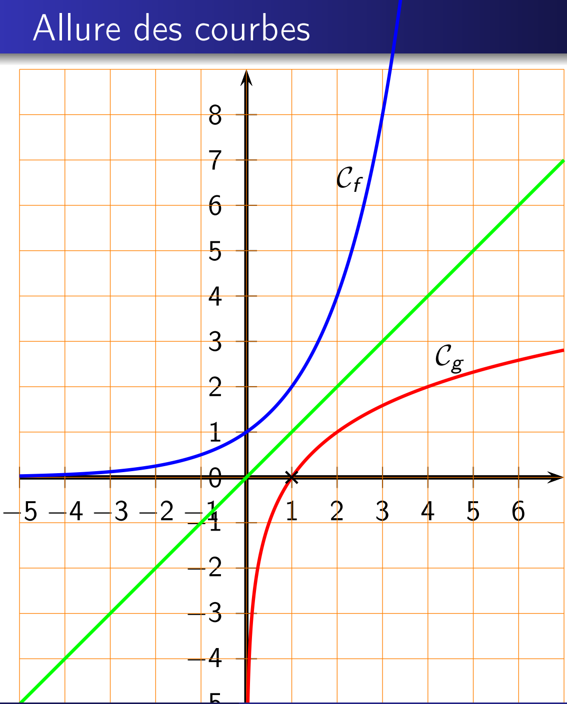
- $\log_b\left(b^x\right) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $b^{\log_b(x)} = x$ pour tout $x > 0$

Remarque importante : pour que $\log_b(x)$ existe, il faut donc que x soit une valeur de type b^y. Si $b > 0$, on a vu que $b^y > 0$. Ainsi, $\log_b(x)$ n'existe que si $x > 0$. Les fonctions logarithmes n'existent donc que pour $x \in]0; +\infty[$.

Logarithme en base 10

La fonction logarithme de base 10 est notée simplement log. Par exemple : $\log(10) = 1$ car $10^1 = 10$, $\log(100) = 2$ car $10^2 = 100$.

Allure des courbes



Pour tout $b > 0, b \neq 1$, la fonction $g : x \mapsto \log_b(x)$ a son graphique qui est le symétrique du graphique de $f : x \mapsto b^x$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Ci-contre avec $b = 2$:

- $f(x) = 2^x$
- $g(x) = \log_2(x)$

<u>Note :</u> pour tout $b \in \mathbb{R}$, $b^0 = 1$, donc $\log_b(1) = 0$, donc la courbe d'une fonction logarithme passe toujours par le point $(1, 0)$.

Résolution d'équations

On se rappelle comment on a appris à résoudre $x^2 = 19$ en écrivant $x = \pm\sqrt{19}$: c'est parce que $x \mapsto \sqrt{x}$ est la réciproque de $x \mapsto x^2$ (sur les positifs, d'où une seconde valeur).

Si f et g sont réciproques, alors $f(x) = 5$ est équivalente à $x = g(5)$ (pour x dans l'image de g). Donc, pour $x \geq 0$, $x^2 = 19$ est équivalent à $x = \sqrt{19}$.

On peut maintenant résoudre des équations de type $b^x = c$. Puisque $x \mapsto b^x$ a pour réciproque $\log_b : x \mapsto \log_b(x)$, alors :

$$b^x = c \Leftrightarrow x = \log_b(c)$$

Exemple : la solution de $10^x = 12\ 345$ est $x = \log_{10}(12\ 345)$ (et on rappelle que $\log_{10} = \log$ que vous avez sur votre calculatrice). On trouve donc $x \approx 4,091491094$.

On peut enfin résoudre « à la main » l'équation de la diapo 4 :

$$\begin{aligned} 1\ 000 \cdot 1,02^x &= 1\ 500 \\ 1,02^x &= 1,5 \\ x &= \log_{1,02}(1,5) \end{aligned}$$

$\div 1000$

On utilise le logarithme

La dernière étape est le fait que $x \mapsto \log_{1,02}(x)$ est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 1,02^x$.

Pour taper $\log_{1,02}(1,5)$ à la calculatrice, il faut aller dans le menu boîte à outils. On trouve $\log_{1,02}(1,5) \approx 20,475$.

Ce qui donne bien le fait qu'il faut attendre 21 ans (car si l'égalité est à $20,475$ ça veut dire qu'à 20 ce n'est pas encore atteint !).

Remarque : aux tests, vous n'aurez pas d'équation de ce type.

Remarque : Sur vos calculatrices de l'an dernier, il y avait la touche log, mais pas moyen d'utiliser de fonctions logarithmes en base différente de 10. Pas moyen, donc, de taper $\log_{1,02}(1,5)$ à la calculatrice... Même sur cette vieille calculatrice, on aurait pu utiliser la formule suivante (hors programme) :

$$\log_b(a) = \frac{\log(a)}{\log(b)}$$

On obtient donc finalement...

$$x = \frac{\log(1,5)}{\log(1,02)} \approx 20,475$$

Les propriétés sur les fonctions exponentielles, couplées au fait que $\log_b(b^x) = x$, donnent les propriétés suivantes sur les fonctions logarithmes. Dans toutes les formules suivantes, les justifications viennent facilement quand on pose $c = b^x$ et $d = b^y$.

Propriétés des logarithmes

- $\log_b(c \cdot d) = \log_b(c) + \log_b(d)$ (car $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$)
- $\log_b\left(\frac{1}{c}\right) = -\log_b(c)$ (car $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$)
- $\log_b\left(\frac{c}{d}\right) = \log_b(c) - \log_b(d)$ (car $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$)
- $\log_b(c^y) = y \cdot \log_b(c)$ (car $(b^x)^y = b^{x \cdot y}$)

Résolution d'équations (à savoir faire !)

On doit savoir résoudre à la main (sans guillemets cette fois !) ce genre d'équations :

Résolution d'équation

$$\begin{aligned}
\log_3(x) + \log_3(7) &= \log_3(49) && \big\downarrow \ \log_b(a) + \log_b(c) = \log_b(a \cdot c) \\
\log_3(x \cdot 7) &= \log_3(49) && \big\downarrow \ \text{Égalité des arguments} \\
7x &= 49 && \big\downarrow \ \div 7 \\
x &= 7
\end{aligned}$$

On vérifie : puisque dans l'équation, il y a le calcul $\log_3(x)$, il faut que $x > 0$. C'est bien le cas dans notre solution.

Remarque : aux tests, vous aurez des équations de ce type.