Chapitre 6.
Angles et trigonométrie (2/2)

Yann Barsamian

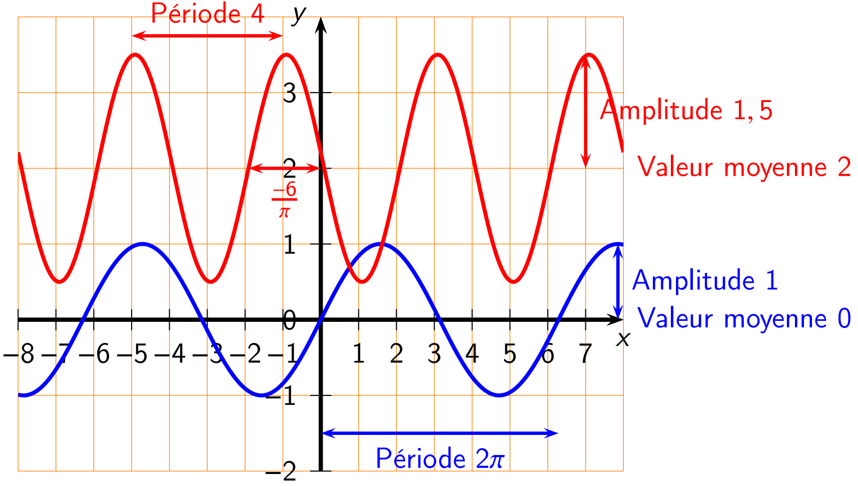
École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2022–2023

Plan du chapitre

- Rappels
- Fonctions sinusoïdales de type $a\sin(bx+c)+d$ [en physique, on écrit souvent $A\sin(\omega t+\phi)$]
- Équations trigonométriques
  - Étude graphique
  - Quelques formules
  - Résolution d'équations simples
  - Formules trigonométriques
  - Formules dans un triangle

En bleu : $x \mapsto \sin(x)$. En rouge, $x \mapsto 1,5\sin\left(\frac{2\pi}{4}x+3\right)+2$.

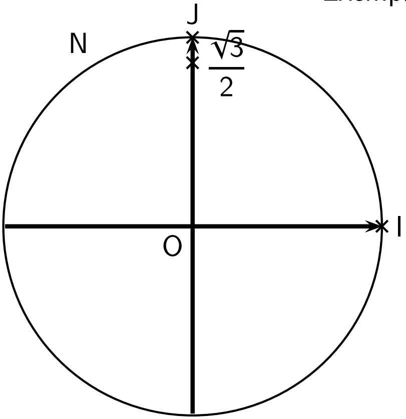


Pour une fonction du type $a\sin(bx + c) + d$ ou $a\cos(bx + c) + d$:

- La période, c'est l'intervalle minimal, sur l'axe des x, pour lequel la fonction se répète : on la calcule avec $\boxed{\dfrac{2\pi}{b}}$.
- La valeur moyenne : c'est la valeur autour de laquelle la fonction oscille. C'est simplement d (cela correspond à un décalage sur l'axe des y).
- L'amplitude, c'est la différence entre la valeur maximale et la valeur moyenne. C'est $\boxed{|a|}$. C'est aussi la moitié de la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale (par symétrie).
- Enfin il y a le décalage sur l'axe de x : la phase à l'origine est la valeur $\boxed{c}$. Il est à noter que c ne correspond pas directement au décalage sur l'axe des x. Ce décalage vaut $-\dfrac{c}{b}$.

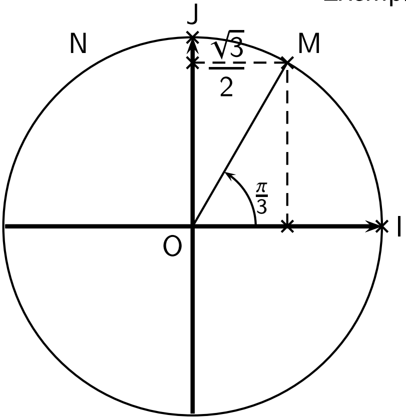
À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre[1] des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

Exemple : résoudre $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



1. https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIeLw

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre[1] des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

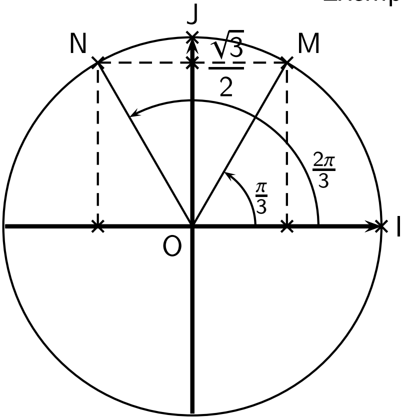


Exemple : résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- On reconnaît que $\frac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).

1. https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIeLw

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre[1] des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

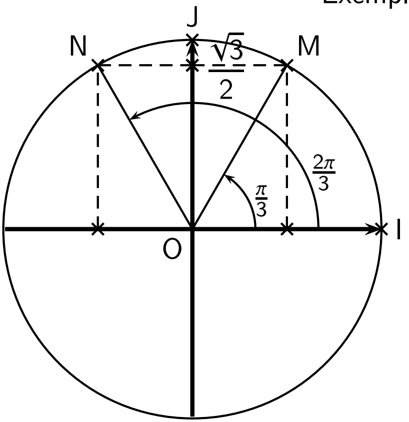


Exemple : résoudre $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- On reconnaît que $\dfrac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).
- Par angles associés, on sait également que $\dfrac{2\pi}{3}$ est solution.

1. https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIeLw

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre[1] des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

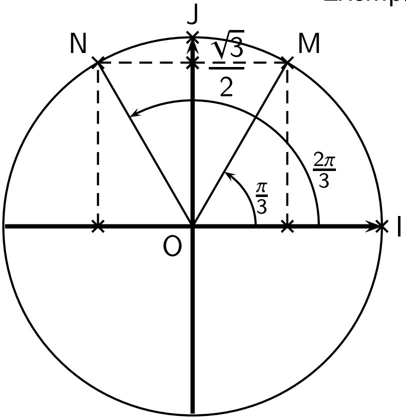


Exemple : résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- On reconnaît que $\frac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).
- Par angles associés, on sait également que $\frac{2\pi}{3}$ est solution.
- Dans $[0; 2\pi[$, c'est terminé.

1. https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIeLw

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre[1] des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$



Exemple : résoudre $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

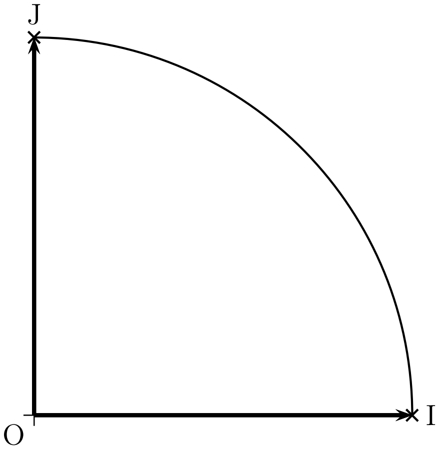
- On reconnaît que $\dfrac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).
- Par angles associés, on sait également que $\dfrac{2\pi}{3}$ est solution.
- Dans $[0; 2\pi[$, c'est terminé.
- Dans un autre intervalle, on utilise des tours complets. Exemple : dans $[-2\pi; 0[$, les solutions sont $\dfrac{-4\pi}{3}$ et $\dfrac{-5\pi}{3}$

1. `https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIeLw`

Résoudre des équations trigonométriques avec la calculatrice :

- Pour résoudre $\cos(x) = a$, on demande $\arccos(a)$.
  Effectivement, pour tout nombre $a \in [-1; 1]$,
  $\cos(\arccos(a)) = a$, donc $\arccos(a)$ est solution de l'équation.
  arccos ne donne que la solution dans $[0; \pi]$. Utiliser les angles associés ensuite !
- Pour résoudre $\sin(x) = a$, on demande $\arcsin(a)$.
  Effectivement, pour tout nombre $a \in [-1; 1]$,
  $\sin(\arcsin(a)) = a$, donc $\arcsin(a)$ est solution de l'équation.
  arcsin ne donne que la solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

On considère deux angles a et b, et on construit les points A, B et C de la manière suivante :

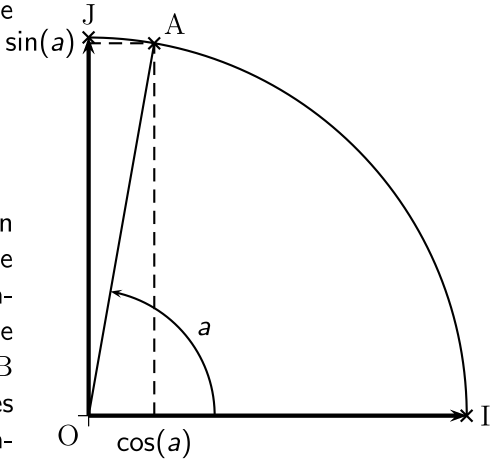


Puisque $\widehat{\mathrm{IOA}} = a$ et $\widehat{\mathrm{IOB}} = b$, on en déduit que $\widehat{\mathrm{BOA}} = a - b$. Le triangle BOA peut donc s'obtenir par rotation du triangle IOC (angle b, centre O). Ainsi, les longueurs IC et AB de ces deux triangles sont les mêmes (conservation des longueurs par rotation).

On considère deux angles a et b, et on construit les points A, B et C de la manière suivante :

- $\widehat{\mathrm{IOA}} = a$

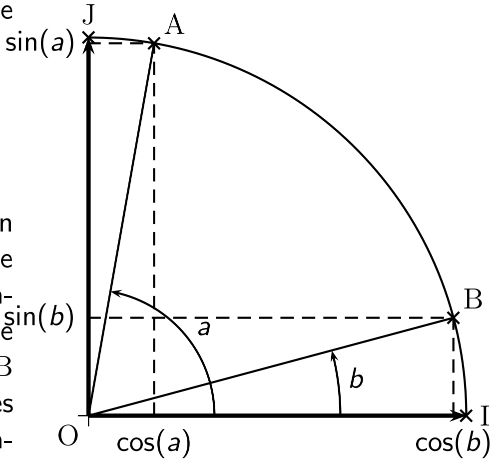
Puisque $\widehat{\mathrm{IOA}} = a$ et $\widehat{\mathrm{IOB}} = b$, on en déduit que $\widehat{\mathrm{BOA}} = a - b$. Le triangle BOA peut donc s'obtenir par rotation du triangle IOC (angle b, centre O). Ainsi, les longueurs IC et AB de ces deux triangles sont les mêmes (conservation des longueurs par rotation).



On considère deux angles a et b, et on construit les points A, B et C de la manière suivante :

- $\widehat{\mathrm{IOA}} = a$
- $\widehat{\mathrm{IOB}} = b$

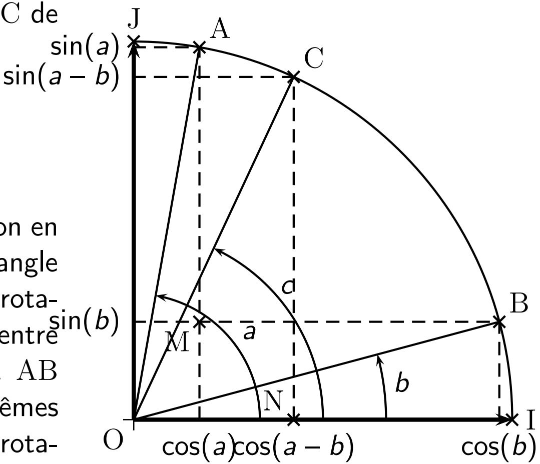
Puisque $\widehat{\mathrm{IOA}} = a$ et $\widehat{\mathrm{IOB}} = b$, on en déduit que $\widehat{\mathrm{BOA}} = a - b$. Le triangle BOA peut donc s'obtenir par rotation du triangle IOC (angle b, centre O). Ainsi, les longueurs IC et AB de ces deux triangles sont les mêmes (conservation des longueurs par rotation).



On considère deux angles a et b, et on construit les points A, B et C de la manière suivante :

- $\widehat{\mathrm{IOA}} = a$
- $\widehat{\mathrm{IOB}} = b$
- $\widehat{\mathrm{IOC}} = a - b$

Puisque $\widehat{\mathrm{IOA}} = a$ et $\widehat{\mathrm{IOB}} = b$, on en déduit que $\widehat{\mathrm{BOA}} = a - b$. Le triangle BOA peut donc s'obtenir par rotation du triangle IOC (angle b, centre O). Ainsi, les longueurs IC et AB de ces deux triangles sont les mêmes (conservation des longueurs par rotation).



Le théorème de Pythagore dans CIN rectangle en N :

$$\begin{aligned} \mathrm{IC}^2 &= \mathrm{IN}^2 + \mathrm{NC}^2 \\ &= (1-\cos(a-b))^2 + (\sin(a-b))^2 \end{aligned}$$

Le théorème de Pythagore dans ABM rectangle en M :

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 &= \mathrm{BM}^2 + \mathrm{MA}^2 \\ &= (\cos(b)-\cos(a))^2 + (\sin(a)-\sin(b))^2 \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{AB} = \mathrm{IC}$, on a également $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{IC}^2$, donc en utilisant les deux valeurs calculées plus haut, il vient :

$$(1-\cos(a-b))^2 + (\sin(a-b))^2 = (\cos(b)-\cos(a))^2 + (\sin(a)-\sin(b))^2$$

On peut maintenant développer cette expression :

$1+\cos^2(a-b)-2\cos(a-b)+\sin^2(a-b) = \cos^2(b)+\cos^2(a)-2\cos(a)\cos(b)+\sin^2(a)+\sin^2(b)-2\sin(a)\sin(b)$

En utilisant maintenant le fait que, pour tout angle x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, on peut largement simplifier cette équation.

$1+\cos^2(a-b)-2\cos(a-b)+\sin^2(a-b)=\cos^2(b)+\cos^2(a)-2\cos(a)\cos(b)+\sin^2(a)+\sin^2(b)-2\sin(a)\sin(b)$

$1+1-2\cos(a-b)=1+1-2\cos(a)\cos(b)-2\sin(a)\sin(b)$

$2-2\cos(a-b)=2-2\cos(a)\cos(b)-2\sin(a)\sin(b)$

$-2\cos(a-b)=-2\cos(a)\cos(b)-2\sin(a)\sin(b)$

$$\boxed{\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)}$$

En remarquant que $\cos(a+b)=\cos(a-(-b))$ il vient la formule pour $\cos(a+b)$:

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$$

Enfin pour les formules avec les sinus, en se souvenant (angles complémentai que $\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)$, il vient :

$$\boxed{\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)}$$

$$\boxed{\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}$$

III/ Formules dans un triangle quelconque

On a les formules suivantes (voir démonstration, exercice 85 p.214 du manuel Sésamaths 1ere[2]), dans un triangle ABC où on note $a = \mathrm{BC}$ (la longueur du segment opposé à A), $b = \mathrm{AC}$ (la longueur du segment opposé à B), $c = \mathrm{AB}$ (la longueur du segment opposé à C), $\alpha = \widehat{\mathrm{BAC}}$, $\beta = \widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\gamma = \widehat{\mathrm{ACB}}$:

- Loi des sinus : $\dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{b} = \dfrac{\sin(\gamma)}{c}$
- Formule d'Al-Kashi : $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos(\beta)$
- Formule de l'aire : $\mathcal{A}(\mathrm{ABC}) = \dfrac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin(\beta)$

Remarque : les formules d'Al-Kashi et de l'aire sont valables aussi en « tournant » le triangle, c'est-à-dire en se plaçant depuis un autre angle. Il faut lire la formule de l'aire comme « la moitié du sinus d'un angle multiplié par les longueurs des deux côtés adjacents ».

2. `https://manuel.sesamath.net/numerique/diapo.php?atome=86165&ordre=1`