Conn.	Méth.	Résol.	Inter.	Pts.	Chaque question est annotée à gauche avec le nombre de points et les compétences évaluées.

Exercice 1 — Partie Commune 4 points

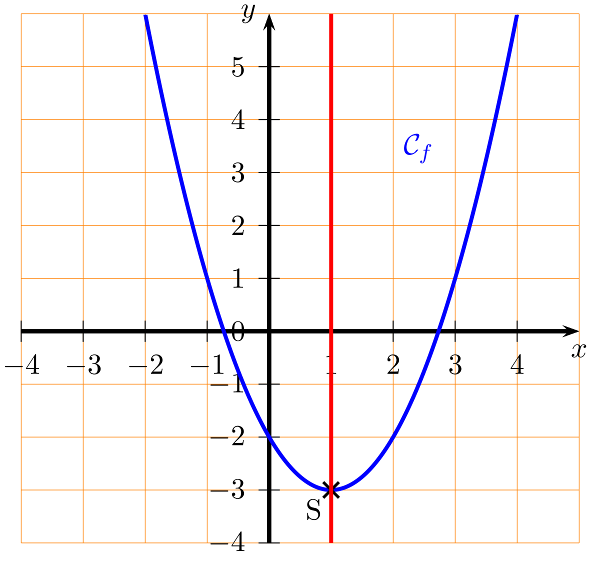
Conn.	Méth.	Résol.	Inter.	Pts.	
	✓			1	1. Résoudre l'équation $3x^2+5x-10=0$ en utilisant la méthode du discriminant.
	✓	✓		1	2. On donne la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=x^2+3x-10$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=5x-3$. Trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.
✓	✓			1	3. On définit la parabole d'équation $y=x^2+2x+3$. Déterminer par le calcul les coordonnées du sommet.
✓	✓			1	4. On définit la fonction du second degré $f(x)=x^2+10x+25$. Déterminer la forme factorisée de $f(x)$.

1. Dans cette équation, $a=3$, $b=5$ et $c=-10$ donc $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times3\times(-10)=25+120=145$. Donc on a deux solutions $x_\pm=\dfrac{-5\pm\sqrt{145}}{6}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{145}}{6};\dfrac{-5+\sqrt{145}}{6}\right\}}$.
2. On peut rentrer les deux courbes de fonctions dans la calculatrice : $f(x)=x^2+3x-10$ puis $g(x)=5x-3$ pour avoir une idée. Le graphique donne comme points d'intersection $\boxed{(-1,82;-12,1) \text{ et } (3,83;16,1)}$. Si on voulait les valeurs exactes, on résout à la main $x^2+3x-10=5x-3$ ce qui est équivalent à $x^2-2x-7=0$.

   Ici $a=1$, $b=-2$ et $c=-7$ donc $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-7)=4+28=32$. Donc on a deux solutions $x_\pm=\dfrac{2\pm\sqrt{32}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{16\times2}}{2}=\dfrac{2\pm4\sqrt{2}}{2}=1\pm2\sqrt{2}$. Donc $\mathcal{S}=\{1-2\sqrt{2};1+2\sqrt{2}\}$. Il nous reste à calculer les ordonnées, pour cela on va prendre la fonction g donc calculer $g(1-2\sqrt{2})=2-10\sqrt{2}$ et $g(1+2\sqrt{2})=2+10\sqrt{2}$. Finalement $\boxed{(1-2\sqrt{2};2-10\sqrt{2}) \text{ et } (1+2\sqrt{2};2+10\sqrt{2})}$
3. L'abscisse du sommet est $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$. Ici, $a=1$, $b=2$ et $c=3$, donc $\alpha=-\dfrac{2}{2\times1}=-1$. Du coup, l'ordonnée est $\beta=(-1)^2+2\times(-1)+3=1-2+3=2$. C'est-à-dire $\boxed{S(-1;2)}$.
4. Pour cette question, plusieurs méthodes :
   (a) On peut reconnaître l'identité remarquable $x^2+2\times x\times5+5^2=\boxed{(x+5)^2}$.
   (b) On peut aussi voir à la calculatrice que la fonction a une unique racine (soit en résolvant $x^2+10x+25=0$ soit en regardant son graphique), et que cette racine est 5. Donc la forme factorisée est du type $f(x)=a(x-5)^2$, et $a=1$ car dans toutes les formes, on peut directement reconnaître la valeur de a qui ici vaut 1.
   (c) Ou encore, on peut calculer les racines à l'aide du discriminant comme plus haut, bien sûr. Puis même chose qu'au point précédent pour conclure.

Exercice 2 — Partie Commune 2 points

Conn.	Méth.	Résol.	Inter.	Pts.	
					Dans cet exercice, on considère une fonction du second degré f, dont on donne le graphique ci-contre. On supposera que tous les points de $\mathcal{C}_f$ qui ont l'air d'être sur le quadrillage le sont effectivement.
	✓			0.5	1. Quelles sont les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_f$?
	✓			0.5	2. Tracer l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ et donner son équation.
		✓		1	3. Donner la forme canonique $$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$$



1. On lit $\boxed{\mathrm{S}(1;-3)}$.
2. L'équation de l'axe de symétrie est donc $\boxed{x=1}$ (tracé en rouge).
3. Le sommet permet de déduire que la forme factorisée s'écrit $f(x)=a(x-1)^2-3$. Pour trouver la valeur de a, on prend un autre point du graphique, par exemple le point $(0;-2)$.

$$\begin{aligned}
f(0) &= -2 \\
&\qquad \text{On remplace } x \text{ par } 0 \text{ dans l'expression de } f(x) \\
a(0-1)^2-3 &= -2 \\
&\qquad \text{On simplifie} \\
a(-1)^2-3 &= -2 \\
&\qquad \text{On calcule} \\
a-3 &= -2 \\
&\qquad +3 \\
a &= 1
\end{aligned}$$

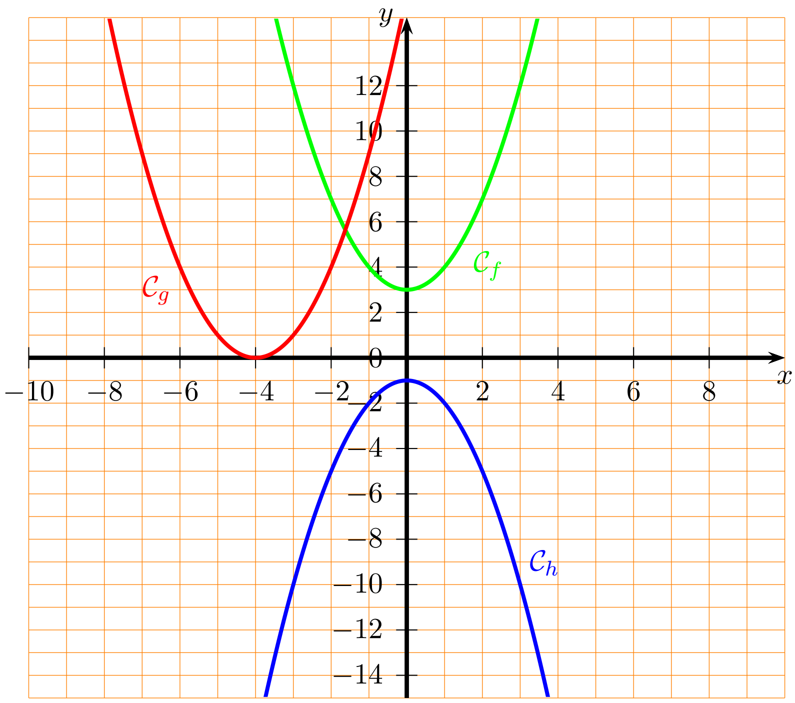
On conclut $\boxed{f(x)=(x-1)^2-3}$.

Exercice 3 — BONUS

✓			✓		Écrire l'équation d'une parabole passant par les points $(1;0)$ et $(-3;0)$.

Une fonction du second degré dont le graphique passe par les points $(1;0)$ et $(-3;0)$, c'est une fonction dont les deux racines sont 1 et -3, donc qui s'écrit $a(x-1)(x+3)$. Par exemple avec $a=1$ on trouve l'équation $\boxed{y=(x-1)(x+3)}$.

Exercice 4 — Difficulé verte **1.5 point**

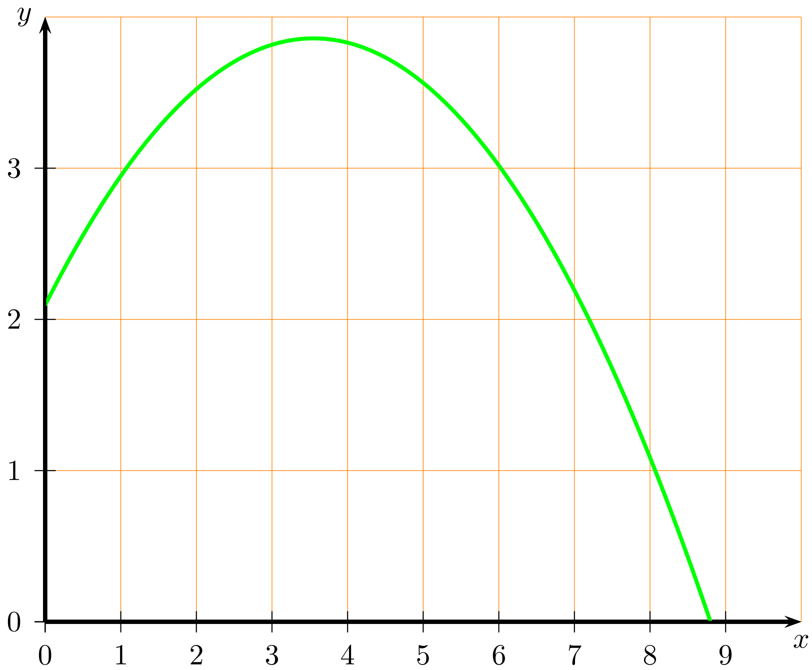
					Dans cet exercice, on considère trois fonctions du second degré f, g et h, dont on donne les graphiques ci-dessous. On considère aussi quatre expressions $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ et $D(x)$.  $A(x)=(x+4)^2$ $B(x)=x^2+3$ $C(x)=(x-4)^2$ $D(x)=-x^2-1$
	✓			1.5	Associer à chaque fonction une expression (notez qu'il y a une expression de plus qu'il n'y a de fonctions !). Justifiez rigoureusement.

$A(x)$ correspond à $\mathcal{C}_g$ (forme canonique, sommet en $(-4;0)$) ; $B(x)$ correspond à $\mathcal{C}_f$ (forme canonique, sommet en $(0;3)$) ; $C(x)$ ne correspond à aucune courbe (forme canonique, sommet en $(4;0)$) ; $D(x)$ correspond à $\mathcal{C}_h$ (forme canonique, sommet en $(0;-1)$).

Exercice 5 — Difficulté verte **2 points**

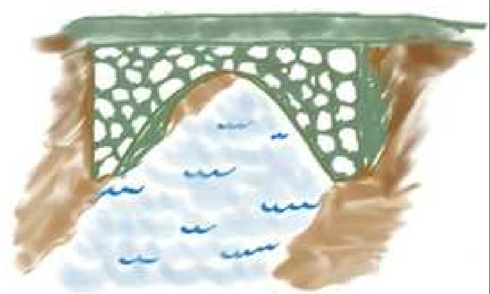
					On donne la fonction f définie par $f(x) = -0,14 \cdot (x+1,7) \cdot (x-8,8)$.
	✓	✓		1	1. Tracer la courbe de cette fonction en ne montrant que la partie où $x \geq 0$ et $f(x) \geq 0$.
	✓			1	2. Donner la forme développée et réduite de $f(x)$.

1. On demande à la calculatrice de tracer la fonction, on voit que la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses jusqu'en $8,84$ environ, donc on va prendre 1 cm pour 1 sur $(\mathrm{O}x)$. Sur cette plage de valeurs, la valeur maximale de f est un peu en-dessous de 4, on va prendre 1 cm pour $0,5$ sur $(\mathrm{O}y)$. Enfin, on place une dizaine de points à l'aide du tableau de valeurs, avant de les relier.

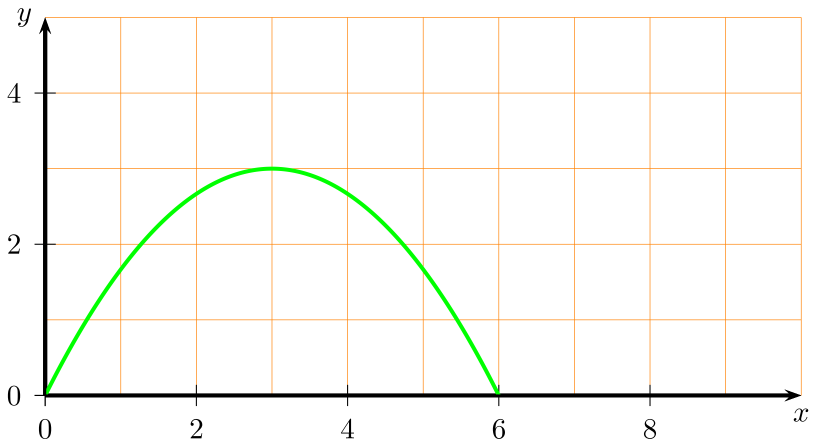


2. Ici on développe avec la double distributivité $f(x) = -0,14\cdot(x+1,7)\cdot(x-8,8) = -0,14\cdot[x\times x - x\times 8,8 + 1,7\times x - 1,7\times 8,8] = -0,14\cdot[x^2 - 7,1x - 14,96] = -0,14\times x^2 + 0,14\times 7,1x + 0,14\times 14,96 = \boxed{-0,14x^2 + 0,994x + 2,0944}$.

Exercice 6 — Difficulté bleue **4 points**

					Le dessin ci-contre montre un pont au-dessus d'un ruisseau. L'arche sous le pont a la forme d'un morceau de parabole : les deux pieds de l'arche touchent chacun un bord du ruisseau. Le cours d'eau fait 6 mètres de large, et le point le plus élevé de l'arche est à 3 mètres de la surface de l'eau. 
	✓		✓	1	1. Dessiner approximativement l'arche dans un repère approprié, en plaçant le pied gauche de l'arche au point $(0;0)$.
		✓	✓	1	2. Montrez que l'arche peut être modélisée par la fonction f suivante : $$f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 3$$
	✓			1	3. Donner la forme développée et réduite de l'expression $f(x)$ donnée à la question précédente.
	✓			0.5	4. Déterminer la hauteur de l'arche lorsque vous êtes à mi-chemin entre le centre du ruisseau et le bord du ruisseau, c'est-à-dire à $1,5$ m du centre.
					Un navire a une largeur de 4 m et une hauteur de $1,75$ m au-dessus de la surface de l'eau.
		✓		0.5	5. Est-il possible pour ce navire de passer sous l'arche ?

1. Puisque l'arche a son pied en $(0;0)$, qu'elle fait 6 m de large et que son sommet, au milieu de l'arche, est à 3 m de hauteur donc en $(3;3)$, on aboutit au graphique suivant :



2. Puisque l'arche a son pied en $(0;0)$ et fait 6 m de large, l'énoncé nous donne donc les deux racines de f : 0 et 6. Puisque le sommet, au milieu de l'arche (donc avec une abscisse au milieu des deux racines, en 3 également), est à 3 m de hauteur, on a un troisième point $S(3;3)$.
   Vu ce qu'on nous demande, le plus simple est d'utiliser le sommet pour écrire la forme canonique $f(x) = a(x-3)^2+3$, puis utiliser le point $(0;0)$ ou $(6;0)$ pour calculer a :

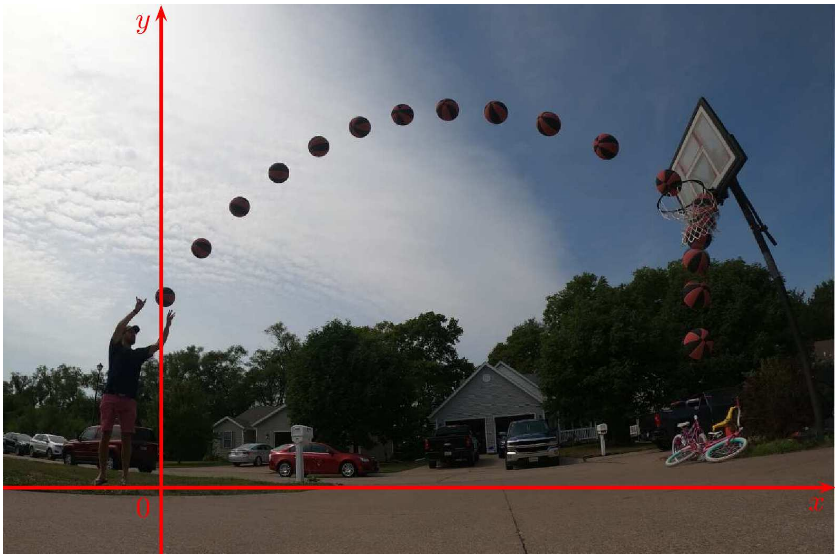
$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 && \text{On remplace } x \text{ par } 0 \text{ dans l'expression de } f(x)\\
a(0-3)^2+3 &= 0 && \text{On simplifie}\\
a(-3)^2+3 &= 0 && \text{On calcule}\\
9a+3 &= 0 && -3\\
9a &= -3 && \div 9\\
a &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   On trouve donc bien $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2+3$.
3. On développe simplement $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2+3 = -\frac{1}{3}(x^2-2\times x\times 3+3^2)+3 = -\frac{1}{3}(x^2-6x+9)+3 = -\frac{1}{3}x^2+2x-3+3 = \boxed{-\frac{1}{3}x^2+2x}$.
4. Il suffit ici de calculer $f(1,5)$ (l'énoncé parle de $1,5$ m du centre, mais c'est également $1,5$ m depuis le bord gauche, qui est à $x=0$). Pour ce faire, le plus sûr est d'utiliser la formule $f(x)$ donnée par l'énoncé (et pas celle que l'on vient de calculer, qui peut être entachée d'erreurs). $f(1,5) = -\frac{1}{3}(1,5-3)^2+3 = 2,25$. Donc, la hauteur de l'arche à cet endroit est de $\boxed{2,25 \text{ m}}$ (ne pas oublier l'unité).
5. Pour savoir si le navire peut passer, il faut vérifier si dans le meilleur des cas, la hauteur est suffisante. Le mieux que l'on puisse faire, c'est de faire passer le navire pile au milieu du pont. Le navire fait 4 m de large, donc il faut mettre le milieu du bateau sous le sommet, et on aura 2 m de chaque côté ; on doit donc vérifier $f(1)$ (ou $f(5)$, c'est la même chose).
   $f(1) = -\frac{1}{3}(1-3)^2+3 \approx 1,67$. Donc, la hauteur de l'arche à cet endroit est d'environ $1,67$ m, ce qui n'est $\boxed{\text{pas suffisant}}$ pour que le navire passe de la sorte (il mesure $1,75$ m au-dessus de l'eau). En revanche, en réfléchissant un peu, on voit qu'il n'y a « que » 9 cm manquants. En remplissant le navire un peu plus, il s'enfoncera dans l'eau (c'est le principe du sous-marin, qui se remplit d'eau pour couler), suffisamment pour $\boxed{\text{finalement passer}}$ sous l'arche (le fait d'être en mathématiques n'interdit pas de réfléchir).

Exercice 7 — Difficulté rouge **6 points**

Un joueur de basketball s'entraîne à lancer des ballons. On modélise la hauteur $h(x)$ de la balle (en mètres) en fonction de l'abscisse x (en mètres) de la balle (diamètre : 24,2 cm) par rapport à l'endroit du lancer. La fonction h est une fonction du second degré.

1. Le premier lancer est réussi, et la fonction associée est h_1. La photographie ci-dessous donne plusieurs positions de la balle :



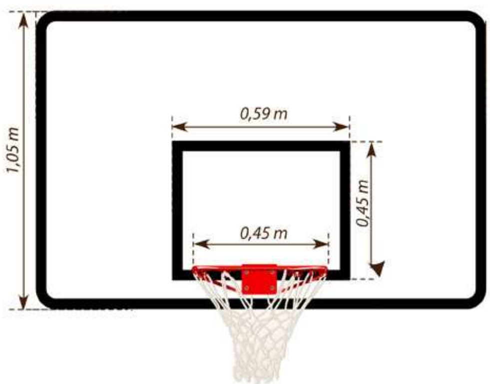
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$h_1(x)$	2,06	2,52	2,92	3,24	3,50	3,69	3,80	3,85	3,83

✓ 0.5 (a) L'image compile des photos tirées en « burst mode » (10 photos par seconde). Estimer la durée pendant laquelle la balle était en l'air entre le lancer et l'arceau.

✓ ✓ 2 (b) En exploitant le tableau de valeurs, estimer une expression de $h_1(x)$.

✓ ✓ 1 (c) La balle est rentrée directement dans l'arceau, qui est à $3,05$ m de hauteur. À quelle distance de l'arceau le joueur a-t-il tiré ?

2. On s'intéresse maintenant à la trajectoire générique $h_2(x)$ d'une balle partant du même endroit que précédemment. En fait, le panneau de basket a les dimensions suivantes, et la balle n'est pas obligée d'atterrir directement dans l'arceau pour marquer, elle peut rebondir sur le rectangle noir interne auparavant :



✓ ✓ 1 (a) Donner une expression $h_2(x)$ où la balle rebondit sur le haut du rectangle avant de tomber dans l'arceau.

✓ ✓ 1.5 (b) Donner une expression $h_2(x)$ où la balle passe au-dessus du panneau (de manière réaliste). Déterminer alors à quelle distance du lancer la balle retombe par terre.

1. (a) Le premier ballon de l'image part juste des mains du joueur. Ensuite on compte 11 ballons en l'air et le 12ème est dans le panier, donc entre le lancer et l'arceau la balle est restée en l'air $\boxed{\text{entre } 1,1 \text{ s et } 1,2 \text{ s}}$.

   (b) Le tableau de valeurs montre une valeur maximale en $x = 3,5$ qui vaut $3,85$ donc on peut estimer que le sommet est environ en $(3,5; 3,85)$ ce qui donne une expression $h_1(x) = a(x - 3,5)^2 + 3,85$. On peut choisir ensuite le point $(0; 2,06)$ pour calculer a : $a(0 - 3,5)^2 + 3,85 = 2,06$ ce qui donne $12,25a = -1,79$ soit $a \approx -0,146$. Finalement, on peut estimer $\boxed{h_1(x) = -0,146(x - 3,5)^2 + 3,85}$.

   (c) Il s'agit ici de résoudre $h_1(x) = 3,05$. On trouve $x \approx 1,15$ ou $x \approx 5,84$; c'est la seconde racine qu'il faut choisir (la première fois que la balle est à $3,05$ m de hauteur, elle est toujours en train de monter) donc le joueur a tiré à $\boxed{5,84 \text{ m}}$ de l'arceau.

2. (a) La balle part du même endroit (donc du point $(0; 2,06)$), et la balle doit maintenant passer par le point $(5,84; 3,5)$, car l'arceau est à $3,05$ m de hauteur, ce à quoi il faut rajouter la hauteur du rectangle, soit $0,45$ m.

   Il n'y a ici pas unicité de la trajectoire, car une fonction du second degré a 3 degrés de liberté, et on ne fixe ici que 2 contraintes (on sait également que a doit être négatif mais sans valeur précise sur a). On connaît la valeur $h_2(0) = 2,06$, on peut donc utiliser la forme développée $h_2(x) = ax^2 + bx + c$ avec donc $c = 2,06$. On sait que $h_2(5,84) = 3,5$ ce qui s'écrit $a \cdot 5,84^2 + b \cdot 5,84 + 2,06 = 3,5$. Puisqu'on va avoir une infinité de solutions, on peut fixer arbitrairement une des valeurs, par exemple $a = -0,14$ comme avant, et alors on trouve dans ce cas $-0,14 \cdot 34,1056 + b \cdot 5,84 = 1,44$ soit $b \approx 1,064$. Finalement $\boxed{h_2(x) = -0,14x^2 + 1,064x + 2,06}$.

   (b) Cette fois, on veut que $h_2(5,84) > 4,1$. Enfin, on n'est pas sûrs, car l'énoncé parle de « la hauteur de la balle » sans préciser si cela correspond au bas de la balle, au centre... pour s'assurer que la balle passe bien au-dessus du panneau dans tous les cas, on va prendre une petite marge (les $24,2$ cm de la balle) et calculer avec $h_2(5,84) = 4,35$.

   On a alors le même problème qu'à la question précédente à résoudre, qui s'écrit cette fois $a \cdot 5,84^2 + b \cdot 5,84 + 2,06 = 4,35$. On fixe de même arbitrairement $a = -0,14$ comme avant, et alors on trouve dans ce cas $-0,14 \cdot 34,1056 + b \cdot 5,84 = 2,29$ soit $b \approx 1,21$. Finalement $\boxed{h_2(x) = -0,14x^2 + 1,21x + 2,06}$.

   Dans ce cas, on doit maintenant résoudre $h_2(x) = 0$ pour savoir quand elle retombe par terre. La calculatrice répond $x \approx -1,46$ et $x \approx 10,1$ donc la balle retombe par terre $\boxed{\text{environ à } 10,1 \text{ m}}$ du lancer.